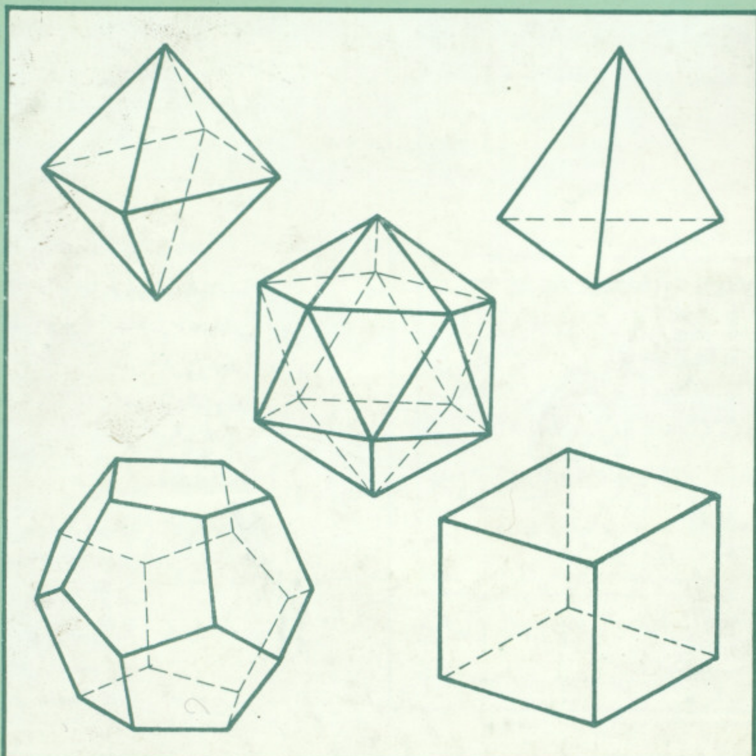
جهاد دانشگاهی
دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران

جُنگ ریاضی دانشجو



جلد ششم، شهریور ۱۳۶۹

فهرست

جنگ ریاضی دانشجو، ۱۳۶۹،۶، ۶۴-۸۲

رابرت ل. لانگ

نکاتی پیرامون تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات•

ترجمهٔ محمد باقری

تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات اغلب در حاشیهٔ فعالیتهای ریاضیدانان ــ اعم از مدرسان و پژوهشگران ریاضی ــ قرار می‌گیرد. این امر موجب پیدایش "دیدگاه اکتسابی" به‌شکل پذیرفتن دربست این یا آن نظر راجع به‌رشته‌های فوق می‌شود که معمولاً با تأمل کافی روی یکایك مطالب همراه نیست. این جزم‌اندیشی برکار ما تأثیر می‌گذارد، ولوآنکه این تأثیر به‌ظاهر ناچیز ودورادور باشد. هدف اصلی مقالهٔ حاضر، انگشت‌گذاشتن روی همین طرز فکر اکتسابی و بررسی چند وچون آن است. در این بررسی خواهیم دید که میزان تأثیر این پدیده به مراتب بیش ازآن است که تصور می‌شد. من قاطعانه براین عقیده‌ام که دانستن تاریخ وفلسفهٔ ریاضیات فی‌نفسه جالب است و می‌تواند برکارایی‌ما درامرتدریس بیفزاید.

پیش ازآنکه به‌نکات اصلی مقاله بپردازم، تلاش می‌کنم مختصراً نشان دهم که اساساً این مباحث به‌کار ما معلمان‌مربوط‌اند. دراینجا نمی‌خواهم برای اثبات مدعای خود روی یك مورد خاص تکیه کنم. گمان می‌کنم نکاتی‌که در مقاله می‌آید خود مؤید همین نظر است.

جورج پولیا بااستدلالی محکم نشان می‌دهد (درکتاب کشف ریاضی[۱]، به‌خصوص دربخش ۵ مقدمه، بخش ۱۴.۲ ،ویادآوری ۱۴.۵) که هدف اصلی‌آموزش ریاضی، یاددادن شیوهٔ مسئله حل کردن است. مسلماً این خود جای بحث دارد که مسئله اساساً به‌چه‌چیزی

• Long, Robert L., "Remarks on the history and philosophy of mathematics," *Amer. Math. Monthly*, **95** (1986) 609-619.

۱. این‌کتاب با ترجمه آقای پرویز شهریاری به‌نام خلاقیت ریاضی در سال ۱۳۶۶ توسط انتشارات فاطمی منتشر شده‌است.ـم.

گفته می‌شود وواژهٔ "مسئله" می‌تواند معنایی چنان گسترده اختیار کند که جای فکر کردن درباره‌اش باقی نماند. با این حال فعلا گفتهٔ پولیا را به‌عنوان یك معیار می‌پذیریم.

مسئله عبارت ازسؤالی است که برای بررسی یا حل عنوان می‌شود. من معمولا نحوهٔ پرداختن به‌یك مسئله را درذهن خود به‌انجام مسافرتی تشبیه می‌کنم. شخص باید بداند در کجاست، به‌کجا می‌خواهد برود، وآنگاه بکوشد تا راهی به‌سوی مقصد بیابد. در برخی موارد دو عنصر اول معلومند و تنها کافی است الگوریتمی برای حل مسائلی از آن نوع خاص به‌دست آوریم و نیازی به‌تفکر بیشتر نیست. حل معادله‌های خطی یك مجهولی نمونه‌ای ازاین‌مسائل است. درسایر موارد، پیش‌ازآنکه بخواهیم به‌جستجوی راه احتمالی بپردازیم باید راجع به‌مقصد نهایی خیلی فکر کنیم. خیلی از اثباتها به‌این دسته تعلق دارند؛ دراینجا به‌دشواری می‌توان تصورروشنی از آنچه باید اثبات شود به‌دست‌آورد. مسئلهٔ دورریختن زباله‌های اتمی هم ازهمین قماش است. ظاهراً درآموزش ابتدایی (تاسطح پیشدانشگاهی) اغلب برداشت فوق‌العاده محدودی از مفهوم مسئله (آن‌هم فقط ازنوع اولی که ذکر شد) وجود دارد و بدتر اینکه مستقیماً به‌سراغ یك الگوریتم می‌روند، بی‌آنکه کارایی الگوریتم را به‌عنوان ابزاری برای صرفه‌جویی در وقت و انرژی نشان دهند.

درمورد مسئلهٔ آموزش، فکر می‌کنم که مقصد معلوم باشد. اما نقطهٔ عزیمت چندان روشن نیست. درهر کلاسی باید سعی‌کنیم دریابیم که شاگردان کجا هستند، وسپس طرحی برای درس بریزیم. این‌کار عمدتاً عبارت است از انتخاب آنچه در برانگیختن شاگردان به‌کار می‌آید. تشبیه‌های گوناگونی برای این برانگیختن ذکر شده است. کارایی‌این‌تشبیه‌ها به‌پاره‌ای نکات فلسفی مربوط می‌شود که بعداً از آنها سخن خواهیم گفت. دراینجا کافی است به‌آن چیزی‌که عموماً برانگیختن خوانده می‌شود، نگاهی بیاندازیم.

هدف از برانگیختن، بی‌شك یاری رساندن به‌شاگرد است تا درمسیر خود ــ ازآنجا که فعلا هست به‌سوی مقصد ــ پیشتر برود. اما مقصد او کجاست؟ این را از خودش باید پرسید؟ به‌هر حال قبولاندن مقصد به‌شاگرد هم کار مشکلی است؛ به‌علاوه، چگونه می‌توان شاگرد را به‌کسب نتیجه‌ای برانگیخت که او خود آن را به‌عنوان مقصد نپذیرفته است؟ بین هر هدف و کوششی که درراه رسیدن به‌آن صورت می‌گیرد، رابطه‌ای دوسویه برقرار است. هدفی‌که به‌طورمبهم درنظر گرفته شده درحکم محرك اولیه‌ای برای درس خواندن است. هرچه شاگرد دراین مسیر پیش‌تر برود برداشتش ازهدف باتوجه به‌آنچه به‌تازگی یاد گرفته، تغییر می‌کند. این هدف تغییر یافته به‌نوبهٔ خود بر روال ادامهٔ تحصیل اثر می‌گذارد. دراغلب موارد این‌روند نامحسوس است وشاگرد نسبت به‌آن وقوف مستقیمی ندارد. ماباید نسبت به‌این پدیده آگاه باشیم، همچنان که باید از پاره‌ای دلایل برای دانش‌اندوزی که ممکن است برای شاگرد خاصی روشن نباشد، اطلاع داشته باشیم.

ولی نکند این طرز تلقی ازبرانگیختن، هیاهوی بسیار برای هیچ باشد؟ به‌علاوه، مدتهاست که همگان ریاضیات را زبانی می‌دانند‌که علم ازطریق آن، شیوهٔ تأثیرگذاری برجهان را به‌ما می‌آموزد. هم‌اکنون کامپیوترها به‌طور روزافزونی وظایف موجود در

دنیای بازرگانی را که شاگردان ما زندگی خود را در آن تأمین خواهند کرد، به‌عهده می‌گیرند. اغلب این شاگردان پی برده‌اند که دست‌کم باید مقداری ریاضیات بدانند.

وقتی ازچیزی برای برانگیختن علاقه به‌مطالعهٔ چیز دیگری استفاده مـی‌کنیم، این کار به‌طور ضمنی به‌معنای آن است که اولی مهم‌تر ازدومی است. این حکم هنگام توجیه لزوم پرداختن به‌موضوع مورد نظر، به‌طور تلویحی بیان می‌شود. هر چند درست نیست برخوردمان حاکی از این باشد که موضوع سعادت آینده برای شاگردان مهم نیست یـا نباید مهم باشد، ولی این‌هم نامعقول است که عاقبت‌به‌خیر شدن را در مقام تنها انگیزه یا مهم‌ترین انگیزهٔ تحصیل قرار دهیم.

این بیگانگی درقائل بودن حد فاصل مشخصی بین جهان واقع وابزارهای ریاضی که علم به کمک آنها این جهان را توصیف و دگرگون می‌کند، ریشه دارد. شاگردان می‌دانند که برای آنکه در کارهای خود موفق شوند باید به‌این ابزارها تسلط یابند ولی وجود رابطهٔ اساسی میان این دو را درک نمی‌کنند. (این نکته، به‌خصوص در این طرز فکر رایج منعکس می‌شود که واقعیت بدون وجود ریاضیات هم همان می‌بود که هست.) درنتیجه آنان ریاضیات را صرفاً یک مانع قلمداد می‌کنند.

برخی ازمدرسان این برداشت سودمدارانه را ازریاضیات می‌پذیرند وبرای‌ایجاد انگیزه،صرفاً روی آن تکیه می‌کنند. (متأسفانه این وضع بیشتر در کلاسهای پایین حاکم است.) عده‌ای دیگرمی‌کوشند تافرهنگ توجه به‌زیبایی نتایج ریـاضی را گسترش دهند. این دوبرداشت ازریاضیات (سودمدارانه و زیبایی‌شناختی) هردو درجهت تقویت دیدگاه جدایی ریاضیات ازجریان وقایع روزمره عمل می‌کنند. به‌نظرمن این برداشت نادرست وغیرضروری است.

گروه عظیمی‌ازشاگردان هستند که تلقی سودمدارانه را بی‌ظرافت وناپسند می‌دانند ولی چندان هم مجذوب زیبایی ریاضیات نشده‌اند کـه به‌فراگیری آن روی آورند. آن معلمی می‌تواند این شاگردان را به‌شوق‌آورد که درک عمیقی ازنقش ریاضیات درزندگی روزمره داشته باشد و بتواند پیوندهای آن را بافعالیتهای گوناگون بشری دریابد. جزئی از هدف هرنوع فلسفهٔ ریاضیات، ایجاد زمینهٔ این درک است.

تاریخ

دراینجا کاری ندارم به‌اینکه ما در دروس ریاضی چه مطالبی تدریس می‌کنیم یا به‌چه صورت و تا چه حد نکات تاریخی را در درسهای معمولی ریاضیات وارد می‌کنیم. اینها مواردی است که به‌بررسی جداگانه‌ای نیازدارد هرچندکه احتمالا برخی ازنکاتی که در این مقاله می‌خوانید به‌آنها مربوط است. قصدم این است کـه دیدگـاه اکتسابی نسبت به‌تاریخ ریاضیات را تشریح کنم و میزان اعتبار نسبی آن رانشان دهم.

همه می‌دانند که جهل تأسف باری درزمینهٔ تاریخ ریاضیات درهمه‌جا دامن گسترده

است. بنابراین ممکن است سخن گفتن از "دیدگاه اکتسابی" گمراه‌کننده به‌نظر آید. اما ماهیت دیدگاه اکتسابی دقیقاً صریح نبودن آن است. با آنکه واقعاً کارهای اصیل فراوانی درزمینهٔ تاریخ ریاضیات انجام شده، این‌پژوهشها نفوذچشمگیری درجامعهٔ ریاضی‌نداشته است. تعبیرمن از "دیدگاه اکتسابی" به‌طور خلاصه چنین است: تاریخ ریاضیات عبارت است از روایت اینکه درچه وقت وبه‌چه ترتیب فلان مفاهیم ظهور کرده‌اند وفلان قضایا اثبات شده‌اند. ممکن است تاریخ ریاضیات به‌روابط باسایر موضوعها هم گریزی بزند ولی هدف اصلیش نشان دادن نحوهٔ بالندگی ریاضیات است و اینکه چگونه نظرها با یکدیگر آمیخته شده‌اند ونظرهای تازه پدید آمده است.

از این دیدگاه، دلایل مطالعهٔ تاریخ ریاضیات عبارت است از (۱) حصول درك وارزیابی دقیقتری از مطالبی که شخص فراگرفته است، و (۲) پی‌بردن به‌این نکته که ریاضیات امروزی هرقدر هم که زیبا و جامع باشد باز هم می‌تواند فراتر برود. بی‌شك زمانی خواهد رسید که نظریهٔ عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت موضوعی عادی تلقی شود، اما این نظریه زیبایی خودرا همچنان حفظ خواهد کرد (مثل عکس زیبایی که رفته رفته کمرنگ وتار شود).

تاریخ ریاضیات بابیشتر حوزه‌های تاریخی دیگر بسیار متفاوت است . این تفاوتها را می‌توان با توجه به‌مفهوم تلویحی ریاضیات بیان کرد: دستگاهی اقلیدسی از حقایق ابدی. تاریخ ریاضیات سرگذشت آشکار شدن پیاپی این حقایق برای ذهن بشر است. بدین‌سان می‌توان آن را نمونهٔ تمام عیار پیشرفت دانست. مهم‌ترین تفاوت بین تاریخ ریاضیات وسایر تاریخها این است که درتاریخ ریاضیات باتفسیر وتعبیر سروکار نداریم. هرمطلب ریاضی صرفاً در رابطه بابقیهٔ ریاضیات معنی پیدا می‌کند. بنابراین بی‌توجهی به‌تقدم وتأخر زمانی (که در اغلب مطالعات تاریخی باید به‌دقت مواظب آن بود) چیزی است که درمورد ریاضیات‌می‌تواند مطرح باشد یانباشد. (مگر آنکه مستقل از زمان بودن حقایق ریاضی، موضوع تقدم و تأخر زمانی را بی‌معنی‌کند.) تمامی ریاضیات به‌صورتی که تاکنون مکشوف شده، معیار یگانه‌ای برای سنجش رسمی هر مطلب تازه است.

بی‌شك فقدان انعطاف دراین طرز تفکر ناشی از بی‌توجهی یابی‌اطلاعی از تاریخ ریاضیات است. اما در سالهای اخیر به‌این نکته توجه شده که آوردن حواشی تاریخی می‌تواندموجب افزایش "علایق انسانی" به‌مطالعهٔ ریاضیات شود. مثلادرمرجع[۳۳]صفحهٔ ۳۳۶ می‌خوانیم که یك‌بار نیوتن رابرای بریدن دریچه‌ای به‌منظور ورود وخروج گربه‌ها به‌یك انبارفرستادند. متأسفانه این‌گونه مطالب بی‌ربط تأثیروارونه دارد وبه‌شاگردچنین القا می‌کند که ریاضیاتی که همراه بااین نکات خواندنی عرضه شده واقعاً داروی تلخی است.

امیدوارم خواننده چنین برداشت بی‌مایه‌ای از ریاضیات و تاریخ آن را نپذیرد. به‌علاوه، موقتاً پذیرفته‌ایم که یکی ازکاربردهای مهم ریاضیات ایجاد روشهایی برای حل مسائل است. این خود تلاشی فوق‌العاده انسانی است. هر چند به‌درستی می‌توان مسئله

حل‌کردن را به‌عنوان نوعی رفتار حیوانی توصیف کرد، ولی درواقع تنها انسان است که مسئله را در برابر خود می‌گذارد و دربارهٔ نحوهٔ حل‌کردن آن به‌تأمل می‌پردازد. پس، از آنجا که ریاضیات مطالعهٔ علم مسئله حل‌کردن است، همچون ادبیات یا دین، خصلت بارز "انسانی" دارد. (البته باید روشن شود که مصداق این گفته دربارهٔ ساختمان اقلیدسی ریاضیات چیست.)

"آیا بهتر نیست ریاضیات صرف را ازشرایط انسانی کشف وکاربرد آن که اساساً جنبهٔ تصادفی داردجداکنیم؟" احتمالا تلاش برای مشخص‌کردن اینکه دراین‌مخالف‌خوانی "ریاضیات صرف" به‌چه‌معنی است، راه به‌جایی نمی‌برد. وقتی‌مطلب را به‌طورجدی‌دنبال کنیم، تمایزی‌که درنگاه اول تااین‌حد روشن به‌نظر می‌رسد، در پردهٔ ابهام فرو می‌رود. نکتهٔ مهم‌تر اینکه، اگر دراین ایراد "ریاضیات صرف" بتواند معنایی داشته باشد، آنگاه ملاحظات تاریخی هیچ ربطی به‌درك این معنا ندارد.

به‌نظر من ریاضیات از برخی جنبه‌ها شبیه موسیقی است، ریاضیات نیز همچون موسیقی آفریدهٔ ذهن بشر است و در عین حال خود معیارهایی برای ارزشمندی یا زیبایی پدید می‌آورد، بدون آنکه این ملاکها را مستقیماً از سایر حوزه‌های تجربهٔ بشری اخذ کند. کیفیت یك راه حل، اثبات یاتألیف خاص، پیش ازهرچیز امری درونی است. اما درك کاملی از ریاضیات (یا موسیقی) تنها با در نظرگرفتن رابطهٔ آن باگسترهٔ تواناییهای بشر حاصل می‌شود. بنابراین تاریخ ریاضیات نباید تنها پیشرفت نظرات ریاضی را ثبت کند، بلکه همچنین باید مفهومهایی ازریاضیات راکه درزمانهای مختلف غالب بوده‌اند، روشن کند وچگونگی مشارکت ریاضیات را درزندگی معنوی وعملی بشرنشان دهد.

حالا می‌توانم مشخص‌تر به‌اشکالات دیدگاه اکتسابی تاریخ بپردازم.

۱. این دیدگاه نمی‌تواند تغییرات پدیدآمده درنقش ومفهوم ریاضیات رادریابد. تعبیرتاریخ به‌عنوان سیر تکامل نظرات مهم ریاضی (مثلا درایوز [۶] یا کرامر [۲۳])باید به‌کمك تعبیر دیگری متکی به‌یك دیدگاه وسیعترکامل شود. مثلا تصور مفهوم ریاضیات (ودرنتیجه برداشتی که ازکارکرداساسی آن می‌شود) ازیونان باستان تاطلوع مسیحیت و ازعهد مسیحیت تا دوران علمی جدید (که باگالیله آغاز می‌شود) دستخوش تغییرات بسیاری شده است. ارزیابی این تغییرات منجر به‌حصول درك بهتری از بحرانهای‌ریشه‌ای حاکم برقلمرو فلسفهٔ ریاضیات در قرن حاضر می‌شود. علیرغم برخی ادعاهای سطحی در مورد کشف نامتوافق بودن ضلع وقطر مربع، وجود "بحران ریشه‌ای" در پهنهٔ ریاضیات یونان قابل تصور نیست.

وقتی تغییرات اساسی درنقش ریاضیات نادیده گرفته شود، این‌تصور پدیدمی‌آید که ریاضیات ازاغلب فعالیتهای بشری یکسره جداست. عقیده به‌این‌جدایی به‌طوروسیعی بین مردم وهمچنین بین شاگردان ما رایج است. این امر مانع عمده‌ای در راه درك ریاضیات است.

۲. دردیدگاه‌اکتسابی تاریخ‌ریاضیات بندرت‌به‌نقطه‌های شروع نادرست واثباتهای

غلط که همیشه جزئی از ریاضیات بوده توجه می‌شود. هرچند روشن است که در این زمینه نباید بحث کرد ولی در درازمدت نادیده گرفتن آنها این تصور را پدید می‌آورد که علم یکراست و بی‌وقفه به‌سوی هدف خود پیش می‌تازد و این اندیشه را درقلمرو ریاضیات نیز تداوم می‌بخشد که: آدمهای خوب اشتباه نمی‌کنند. می‌دانیم که درواقع چنین نیست، ولی "معرفت" امری فوق‌العاده انتزاعی است. ما به‌شاگردان "می‌گوییم" که همه کس مرتکب اشتباه می‌شوند، درحالی که اگر تصور دقیق‌تری از گذشته عرضه می‌کردیم گفته‌هایمان متقاعدکننده‌تر می‌شد.

۳. بندرت اشارهٔ مستقیمی به‌این نکته می‌شود که آنچه دریك یا دوترم درس حساب دیفرانسیل وانتگرال تدریس می‌شود، عصارهٔ بیش از ۱۵۰ سال کار عده‌ای افراد بانبوغ درخشان است. البته این وضع حاکی از تصمیم‌گیری آموزشی برای عرضهٔ ابزارهای ریاضی مورد نیاز دانشجو طی کوتاهترین مدت ممکن است. (تصمیمی که تنها براساس عادت و بدون تأمل صورت نمی‌گیرد وهمیشه تصمیم تلقی نمی‌شود.) ولی ما این دین را نسبت به‌شاگردان خودداریم که به‌آنها تذکر دهیم که ریاضیات به‌صورت مطالبی حك‌شده برکتیبه‌ها کشف نشده است، بلکه آفریدهٔ ذهن بشر است همچنان که خود آنها با مسائل کلنجار می‌روند.

۴. نقش رسوم متداول و تأثیر افراد بندرت بازشناخته شده است. در ریاضیات هم مثل نقد آثارشکسپیر، موسیقی جاز ولباس‌پوشیدن، رهبران، پیروان وسلیقه‌های مختلف وجود دارد. این پدیده‌ای بشری (یا شاید بشری‌ترین پدیده) است. درك این پدیده نه‌تنها به‌رفع انزوای ریاضیات کمك می‌کند بلکه امکان پرداختن به‌این سؤال را هم فراهم می‌آورد که: کدام کیفیتها موجب امتیاز رهبران ریاضیات می‌شود؟

۵. تاریخ ریاضیات عموماً به‌عنوان ثبت مسیر تکامل اندیشه‌های مهم ریاضی قلمداد می‌شود. این نگرش بخصوص برای ریاضیدانان مفید است. امادراینجا هم چون همه‌چیز درون چارچوب خودریاضیات محصور می‌شود، اسطورهٔ انزوای ریاضیات قوت‌می‌گیرد. گذشته را می‌توان ازاین لحاظ بررسی کرد که چه مسائل یا چه‌نوع مسائلی بیش ازهمه موجب پیشبرد ریاضیات بوده است. این زاویهٔ نگرش امکان بیشتری برای بررسی رابطهٔ میان ریاضیات وسایر جنبه‌های فرهنگ فراهم می‌آورد.

به‌عنوان مثالی که شاید چندان هم منطبق برموضوع نباشد. آیا تصادف محض باعث شد که مهارکردن عملیات نامحدود، سریهای نامتناهی بانفی گستردهٔ فلسفهٔ نظری هگل مقارن شود؟ یك نمونهٔ ملموس‌تر، اهمیتی است که افلاطون برای مسئلهٔ تضعیف مکعب قائل بود. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به‌کتاب واندر وردن [۳۶]، صفحهٔ ۱۳۷.

به‌عنوان مثالی از گذشتهٔ نزدیکتر، به‌این نکتهٔ جالب می‌توان اشاره کرد که تقریباً همزمان بافروپاشی ایمان به‌ارزشهای فرهنگی و "تعالی"، به‌نظر می‌رسید که مبانی منطقی ریاضیات درحال متلاشی شدن است.

۶. تمایز میان ریاضیات محض وکاربردی، وتلقی ریاضیات به‌عنوان یك ابزار، از

تاریخ ریاضیات استنباط شده است. این نکته بااولین نکته‌ای که ذکر آن دربالا آمد ارتباط نزدیك دارد. به‌این‌ترتیب نادیده گرفته می‌شود که این تمایز (واین ابزار بودن) به‌نوبهٔ خود جای بحث دارد.

مثلا، اغلب می‌خوانیم که ریاضیات در مصر باستان بـه‌صورت ریاضیات کاربردی آغاز شد. درواقع نام هندسه (ژئومتری) که به‌معنی اندازه‌گیری زمین است ازاین امر حکایت می‌کند. (البته این نام یونانی است نه‌مصری ونشان‌دهندهٔ برداشت یونانیهاست‌از آنچه مصریان انجام می‌دادند.) اطلاق نام "ریاضیات کاربردی" به‌یك نـوع فعالیت در واقع‌رجوع به‌همان‌تمایز موردبحث‌است‌نه‌دلالت بر اینکه‌فعالیت مز بور جنبهٔ کاربردی دارد. تمایز فوق برامکان استفاده ازریاضیات به‌عنوان ابزاری برای درك طبیعت وتأثیر گذاشتن برآن مبتنی است. اما این امکان تنها درچارچوب تصور امروزی غرب ازطبیعت مطرح است؛ تصوری که برای مصریان عهدباستان، یونانیان باستان وحتی مسیحیان قرون وسطی به‌کلی ناآشنا بود.

فلسفه

به‌اعتقاد بسیاری‌افراد، رفتن از تاریخ به‌فلسفه مثل رفتن ازمحیطی‌آکنده ازغبارر قیق‌به مه غلیظ است. نکات تاریخی‌ممکن‌است‌ربطی‌به‌درك و تدریس ریاضیات داشته باشند، ولی از فلسفه چه انتظاری می‌توان داشت؟ عامل عمدهٔ توجه به‌فلسفهٔ ریاضیات "بحران ریشه‌ای" ناشی از کشف تناقضات نظریهٔ مجموعه‌ها بود. این بحران اکنون برطرف شده است و درواقع تلاشهای انجام‌شده، به‌پیدایش یك‌منطق ریاضی نیرومند انجامیده است. ریاضیات ازاین بحران سربلند و پیروز بیرون آمده‌وبه‌نظر نمی‌رسد نیازی به "فلسفه" داشته باشد. درمورد خود فلسفهٔ ریـاضیات، عنصر جسورانـه‌ای وجود دارد. ازآنچه راجـع به‌فلسفهٔ افلاطون، رئالیسم (واقع‌گرایی) ونظیرآن گفته می‌شود، آیا چیزی هم به‌فلسفهٔ ریاضیات برمی‌گردد؟ آیا ارشمیدس یانیوتن فیلسوف بودند؟ گـاوس چطور؟ فیلسوفان می‌توانند یك عمر سخن بگویند؛ ریاضیدانها کار می‌کنند.

تفاوت بین فلسفه، تاریخ، وریاضیات ظاهراً مبتنی بر وضوح نسبی مسائل آنهاست. مسئله‌های فلسفی هیچگاه روشن نیستند، ازهمین‌روست‌که اثبات‌گرایان کار خود را بدون توسل به‌فلسفه پیش می‌برند. مسائل تاریخی حوزه‌ای از مسائل روشن ولی بی‌اهمیت را دربر می‌گیرد (مثلا اینکه فراوانی منابع طبیعی چگونه بـرپیدایش نظام سیاسی فعلی یك کشور اثر گذاشته است). برخلاف مسائلی ازاین دست، مسائل ریاضی روشنند. این‌مسائل ممکن است خیلی دشوار باشند، ولی حل شدن آنها فوراً برما معلوم می‌شود. اثباتهایی هم وجود دارند که فوق‌العاده پیچیده‌اند (مثلا رده‌بندی گروههای متناهی) ولی‌ظاهراً بین‌این پیچیدگی وابهامی‌که بامسائل فلسفی همراه است، تفاوتی کیفی وجود دارد. مسائل ریاضی جواب می‌خواهند؛ مسائل فلسفی تفکرمی‌طلبند. یك فلسفهٔ ریاضی مناسب نشان می‌دهد که تفاوت بین این‌دو به‌شدتی که تصویرکردم نیست. دراینجا لازم است بحثی مطرح شود که

با بررسی تلقی عموم از فلسفهٔ ریاضیات آغاز می‌شود. در این بحث باید مسائل مختلف وارسی وامور بی‌اهمیت از نکات اساسی جدا شود. در این بحث باید مراقب این لغزش روش‌شناختی بود که همان مفاهیم مورد بررسی در بحث به‌کار نرود. این بحث باید به درك عمیق از ریاضیات، بخصوص ازنقش (غالباً نامرئی) ریاضیات در این بنیادی‌ترین تصورما راجع به این موضوع بینجامد که سؤال چیست و به‌چه معنی است. درمقالهٔ حاضر تنها خطوط کلی این بحث مطرح می‌شود.

موضوعهای مورد بحث درهر فلسفهٔ ریاضیات رامی‌توان تحت این‌عناوین‌دسته‌بندی کرد: مبانی منطقی، فقدان قطعیت، ماهیت برهان، رابطهٔ شناخت ریاضی با "جهان واقع" و"مقام بود شناختی" اشیای ریاضی همچون‌اعداد، مجموعه‌ها، توابع وجز آنها بخصوص یادآوری کنیم که مبحث مبانی منطقی، سراسر فلسفهٔ ریاضیات را در بر نمی‌گیرد.

اشتغال‌شدید به‌مسائل‌مربوط به‌مبانی، سایرمباحث را تحت‌الشعاع قرارداده وموجب بی‌مایه‌کردن فلسفهٔ ریاضیات شده، به‌طوری‌که برتلقی اکثر ریاضیدانان فعال اثر گذاشته است. روبن‌هرش(در[۱۸]) ریاضیدان‌فعال را به‌عنوان"افلاطون‌گرا در روزهای هفته و صورت‌گرا در روز تعطیل آخرهفته" توصیف کرده است. (منظور وی از صورت‌گرایی، موضع فلسفی مبتنی براین نظر است که بخش اعظم ریاضیات یا تمامی آن یك بازی بی‌معناست.) وقتی ریاضیدانان نتوانند توضیح دهند که کارشان چگونه معنی می‌یابد، به‌بی‌معنی خواندن آن متوسل می‌شوند. ولی این کار بی‌حاصل است؛ درست مثل اینکه بگوییم فلانی نمی‌تواند دوستی قدیمی را به‌یادآورد مگر آنکه بتواند به‌شکل منظم و منطقی بیان کندکه این کاررا چگونه انجام می‌دهد. ازنظرمن مسلم‌است‌که چیزی به‌عنوان بازی بی‌معنی وجود ندارد؛ به‌همین اندازه مسلم می‌دانم‌که ریاضیات محض بامعنی است. هرش برآن است‌که انتخاب بین افلاطون‌گرایی وصورت‌گرایی بسیاربی مورد است (تا وقتی هم "شهودگرایی" وهم "منطق‌گرایی" درمیان باشند، اوضاع بدین‌قرار است) ونباید ریاضیدان را به‌انجام چنین انتخابی واداشت. توضیح پدیدهٔ معنی درریاضیات یك مسئلهٔ فلسفی است، مسئله‌ای‌که به نظر من بسیارمهم است.

شاید اکنون که دیگرموضوع ارائهٔ مبنایی منطقی برای ریاضیات همه چیز را تحت‌الشعاع قرار نمی‌دهد، بتوانیم دربارهٔ معنای این نیاز سؤال‌کنیم. چه فرضهایی‌دربارهٔ ماهیت ریاضیات و رابطهٔ آن بااندیشه وتجربه به‌طورکلی دراین نیاز به‌مبنای منطقی نهفته است؟ این پرسشی‌است‌که بافراهم‌کردن تعریف جدیدی برای واژهٔ "مجموعه" یا حتی "مبنا" نمی‌توان بدان پاسخ گفت. این سؤال بیشتر اندیشه می‌طلبد تا "جواب".

باتعمق روی این مسئله می‌توان کلاً درك بهتری از مسائل بدست آورد؛ این درك می‌تواند سرکلاس برایمان مفید واقع شود. درهرمسئله، درعین حال که چیزی (همان "مجهول") خواسته می‌شود، صریحاً یا تلویحاً چارچوبی (که مورد سؤال نیست) مشخص می‌شود که جواب را باید برحسب آن یابراساس آن جستجوکرد. از این دیدگاه، خیلی از مسائل جبر وحساب دیفرانسیل وانتگرال بسیار ساده‌اند. آنها را می‌توان بامسئلهٔ جور-

کردن پازل‌های تصویری‌مقایسه کرد که‌درهردومورد می‌دانیم که‌نتیجه کم‌وبیش به‌چه‌صورتی باید باشد. شکل نهایی مطلوب درپازل‌های تصویری کـه اغلب روی جعبهٔ آنها نقش بسته بخشی ازچارچوبی است که باید هدف را درمحدودهٔ آن دنبال کرد(این گفته درمورد این فرض هم که قطعات پازل حتماً با هم جور در می‌آیند، صادق است.).

اگرشکلی روی جعبه چاپ نشده باشد، مسئله دشوارتر است، ولـی بی‌معنی نیست. اگر فقط به‌ما جعبه‌ای حاوی قطعات پازل بدهند وقرار باشد که با آنها تصویری بسازیم، بخش بیشتری ازچارچوب مورد سؤال واقع شده است. دراینجا چارچوب موجود به‌این حد تقلیل یافته که بدانیم منظور از جورشدن قطعات بایکدیگرچیست وواژهٔ "تصویر" به‌چه معنی است.

مسئلهٔ مبانی ریاضیات عملا چیزی به‌نام"ماهیت ریاضیات" را براساس چارچوب "تفکر و تجربه به‌طورکلی" مورد سؤال قرار می‌دهد. ابهام موجود در این اصطلاحات موانعی رفع نشدنی و بخشی اساسی از مسئله‌است. آنچه شاید مهم‌تر باشد این است که هرچه دراین‌باره بیشتر تفکر می‌کنیم روشن‌تر می‌شود که نمی‌توان ماهیت ریاضیات را مورد سؤال قرارداد، بی‌آنکه درمفهوم تفکر وتجربه به‌طورکلی دست برده باشیم.

این بصیرت محدود برای حل مسئله کافی نیست وفقط چشم‌اندازآن را تغییرمی‌دهد. به‌نظرمن مفیدترآن است که ازفیلسوف بخواهیم تانقش ریاضیات را دربرداشت ماازتفکر وتجربه ملموس سازد. این موضوع خصلتی دوری داردکه می‌توان آن‌را به‌تقریبهای‌پیاپی تشبیه کرد. کار بابرداشت خامی از ریاضیات (مثلا به‌عنوان علم اعـداد و روابط آنها) و برداشت خامی از تجربه (ادراك اشیای مادی) آغاز می‌شود. اما در همین‌جا هم به‌صرف وجود اشیای متمایز، یك مفهوم "ریـاضی" یعنی کمیت مستقر است. تفکـر درایـن زمینه به‌برداشت نسبتاً روشنتری از ریاضیات و غیره می‌انجامد.

شاید درك این مطلب کـه ریاضیات بسیار بیشتر ازآنچه عمومـاً تصور می‌شود در تجربیات نقش دارد، مهم‌ترین نتیجهٔ تفکر دربارهٔ مبانی باشد. شاخه‌های عمده‌ای درمبانی ریاضیات مربوط است به‌آنچه در بالا به‌نام رابطهٔ شناخت ریاضی باجهان واقع خوانده شد.("جهان واقع" همان است که درآن می‌خوریم و مـی‌آشامیم، گیاه مـی‌چینیم و بیشتر اندوخته‌های خودرا حفظ می‌کنیم؛ جهانی ازاشیای مادی که ازآن به‌جهان مفاهیم‌می‌نگریم، نشانه‌های قدسی، مفید وپرجاذبهٔ جهانی فراتر ازطبیعت که در عین حال می‌تواند موجب اخلال دردرك حقایق شود.) ریاضیات بـه‌ظاهر از درون خود وبدون اتکا به‌جهان واقع می‌بالد. بااین وجود، دم‌به‌دم کاربردهایی برای آنچه قبلا ریاضیات "محض" تلقی می‌شده پدیدارمی‌شود. مابرآنیم که ریاضیات بردوگونه است: خالص وکاربردی. دیویس‌وهرش ([۴]، ص۸۶) اظهارنظرهاردی راجع به "خالص بودن ریاضیات" رانقل کرده‌می‌افزایند "[این‌روندغالب‌درریاضیات قرن بیستم وجود دارد] که‌والاترین‌خواسته درریاضیات‌دستیابی به‌یك اثرهنری ماندگار است. اگـر تصادفاً بخش زیبایی از ریاضیات محض،کاربردی هم پیداکند که چه‌بهتر». از سوی دیگر کتاب کلاین [۲۱] حاوی بحث شورانگیزی‌است

مبنی بر اینکه ریشه‌های راستین و آبشخور واقعی ریاضیات در طبیعت و در کاربردهای عملی نهفته است.

برای پی بردن به‌وضعیت متقابل ریاضیات محض و کاربردی ابتدا باید به‌دقت دید که وجود چه تمایزی بین آنها پذیرفته شده است. آنچه از قـول دیویس و هرش نقل شد حاکی از تمایز بین ارزیابیهای متکی به زیبایی‌شناسی و متکی به‌کارایی است. البته این موضوع فوق‌العاده پیچیده‌ای است و در اینجا فقط می‌خواهم بر یك نکته تأکید کنم: ارزیابی زیبایی‌شناختی یك چیز (مثلا اثبات یك قضیه) معمولا چیزی جز ارزیابی خود آن شیٔ تلقی نمی‌شود؛ چیزی که از لحاظ مفید بودنش بررسی می‌شود، ارزشش ناشی از ارزش هدفی است که آن‌را به‌کار می‌گیرد. در مفهوم ریاضیات کاربردی شباهتی با یك ابزار وجود دارد.

این نکته سر کلاس درس به‌کار می‌آید. برای خیلی از شاگردان بسیار مفید است که تشابه بین نحوهٔ برخورد با مسائل ریاضی و مسائل مکانیکی را دریابند. مثلا می‌توان طریقهٔ حل‌کردن معادلات درجهٔ دوم به‌روش آزمون و خطا یا فاکتورگیری را با روشهای سوراخ‌کردن دیوار با استفاده از میخ و چکش یا متهٔ برقی مقایسه کرد. فرم ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم در جایگاه خود همانند مته برقی مفید واقع می‌شود. توجه به‌جنبهٔ ابزاری ریاضیات در حل مسائل گاهی به‌رفع شبههٔ مرموز بودن ریاضیات که اغلب در ذهن شاگـردان وجود دارد کمك می‌کند.

اما این برداشت از ریاضیات به‌عنوان ابزار، که در تصور ما از ریاضیات کاربردی اهمیت بنیادی دارد هنوز باید مورد بررسی قرار گیرد. عموماً تصور، از ابزار، چیزی جنبی است برای منظور خاصی که به آن نیاز دارد به کار می‌بریم و سپس کنارش می‌گذاریم. زمانی نقش زبان در بیان اندیشه به‌ابزار تشبیه می‌شد ولی بزودی معلوم شد که زبان نقشی بسیار فعالتر از آن دارد که بخواهد به‌ابزار تشبیه شود. درواقع می‌توان گفت که برداشت رایج از ابزار چیزی درحد تقریبهای درجهٔ اول است که در کاربـردهای عملی روزمره بخوبی جوابگو هستند ولی اگر بخواهیم بار فکری بیشتری بر آنها بگذاریم کارایی خود را ازدست می‌دهند. حتی در مورد کارهای کاملا مکانیکی، ابزار نقش فعالی در برداشت موجود از مسائل دارد. آشنایی استادکار مکانیك با اینکه چه ابزارهایی در دسترس هستند، روی دریافت او از کار مکانیکی تأثیر تعیین‌کننده دارد؛ همان‌طور که آشنایی شطرنج‌باز با طریقهٔ حرکت مهره‌ها ارزیابی او را از صفحهٔ شطرنج مشخص می‌کند.

نقش فعال مفاهیم ریاضی در درك مسائل کاربردی چندان عظیم است که به‌نظر من تشبیه آن به‌ابزار در این مقاله کاملا نارساست. با متمایز دانستن ریاضیات محض و کاربردی، این واقعیت فراموش و از معرض دید خارج می‌شود. البته در ریـاضیات می‌توان مباحث "ناب" و مباحثی که به‌طور انفعالی مثل یك آچار پیچ گوشتی به‌کاربرده می‌شوند، یافت. ولی هیچ یك از اینها نباید سبب شود که از نقش بسیار مهم ریاضیات در تعیین اینکه چه‌چیزی مسئله به‌شمار می‌آید و چه‌چیزی جواب محسوب می‌شود غفلت کنیم. با پی بردن به‌این نکته، کمرنگ و محوشدن مرز بین ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی شروع می‌شود.

ویتگنشتاین این‌وضع را به‌روشنی ترسیم کرده است: "اماچه‌چیزهایی 'حقایق' هستند؟ آیا فکرمی‌کنید بتوانید نشان دهید که 'حقیقت' چیست، ومثلا باانگشت به‌آن اشاره کنید؟ آیا همین برای روشن کردن نقش تثبیت در مورد حقایق کافی است؟ اگر برفرض وظیفهٔ ریاضیات این‌باشدکه 'خصلت' آنچه راکه حقیقت می‌نامیم تعریف کندا چرا نبایدریاضیات به‌جای 'آموختن‌حقایق' صورتهایی از آنچه حقیقت خوانده می‌شود بیافرینند؟" ([۳۸]،ص ۳۸۱).

فقدان قطعیت

ماجرای فقدان قطعیت را موریس کلاین درکتاب خود باعنوان ریاضیات؛ فقدان قطعیت [۲۱] بیان کرده است. وی چگونگی پیدایش تصور طرح ریاضی خداوند برای طبیعت درخلال قرن شانزدهم را به‌عنوان نتیجهٔ کشاکش بین عقیدهٔ دینی جاری و احیای گرایش به‌اندیشهٔ کلاسیك توصیف می‌کند. درك حقیقت ریاضی با پی‌بردن به‌طرح خداوندبرای طبیعت معادل شد. این دوره‌ای طلایی برای ریاضیات بود. نتیجهٔ این‌وضع بی‌تردیدامکان بروز جدایی بین جنبه‌های محض وکاربردی بود.

دربقیهٔ کتاب فقدان تدریجی پاکی مطلق در ریاضیات بیان شده است.ریاضیات به تدریج به‌طور فزاینده‌ای سیمای یك آفریدهٔ بشر را به خود می‌گیرد که از خطاهای انسان نیزمصون نیست. ریاضیات یك‌چند به‌عنوان آخرین درقطعیت و آخرین مجوزبرای اعتقاد به‌امکان شناخت برپای ایستاد وآنگاه فرو ریخت. ازخرابه‌های آن قیل وقال فراوانی برسراصول به‌راه افتاد که اکنون بدون نیل به‌توافق واقعی،فروکش کرده است. امیدی نیست که ما ریاضیدانان بتوانیم از سایهٔ قضایای گودل خارج شویم. "تلاشهای انجام شده برای رفع تناقضهای ممکن واثبات سازگاری در ساختارهای ریاضی تاکنون ناکام مانده است." ([۲۱]، ص ۲۷۶).

ظاهراً این فقدان قطعیت مسائلی جدی از نوع فلسفی را پیش می‌کشدکه بی‌شك به‌ریاضیات مربوطند. اگر ریاضیات ازعهد افلاطون تاکانت به‌عنوان مدلی برای دانش بمعنی کلی درخدمت فیلسوفان بوده‌است، شاید تغییری درتصور رایج ازریاضیات،معنای این روش سنتی را هم تغییر دهد. آنچه به‌عنوان ریاضیدان و مدرس بیشتر به ما مربوط می‌شود، همانا این نکته است‌که برداشت ماازماهیت ریاضیات شدیداً تحت تأثیر همان سنت (ازافلاطون تاکانت) است. این امرموجب بروز دوگانگی بین برخورد مستقیم ما با ریاضیات و درکمان ازآن می‌شودکه تحت‌الشعاع سنت مذکور است. این دوگانگی خود را در آنچه دیویس وهرش وضعیت فلسفی ریاضیات جاری ([۴]، ص ۳۲۱) خوانده‌اند نشان می‌دهد.

فقدان‌قطعیت تاجایی‌که فی‌نفسه مطرح باشد (نه به‌عنوان یك‌پدیدهٔ تاریخی-فرهنگی) به‌نظر من چندان عجیب یا مهم نیست. آنچه برای من بیشتر حیرت‌انگیز است مفهوم "قطعیت مطلق" است نه‌اینکه ریاضیات این قطعیت مطلق را عرضه نمی‌کند. بدنظر من بین

این حادثهٔ تاریخی (با تداوم ۴۵۰ ساله) و تــاکتیك بحث‌انگیزی کــه انسانی پوشالی را می‌سازد و متلاشی می کند شباهتی وجود دارد.

ریاضیات آفریدهٔ بشراست. اما نه به‌این معنی که امری دلبخواهی است، بلکه به‌این معنی که بی‌جا خواهد بود اگر توقع داشته باشیم کــه به‌معنی رایج کلمه "قطعاً درست" باشد. بی‌مورد است اگــر ریاضیات را به‌عنوان منشأ یا محمل‌شناخت مطلقاً قطعی، بسنجیم یا تصور کنیم. ذکر این مطلب که فلان برهان درست بودن قضیه‌ای را نشان می‌دهد، معادل این است که گفته شود برهان مذکور گواه این عقیده است کــه قضیهٔ فوق هیچ زمانی در آینده درایجاد تناقضی نقش نخواهد داشت. تاریخ ریاضیات نشان می‌دهدکه معیارهــای استحکام درمورد برهان، دستخوش تغییرات شده ودر تاریخ ریاضیات می توان نمونه‌هایی یافت از "برهانهای غلط" که‌مورد قبول همگان بوده و "برهانهای درست" که وسیعاً رد شده است.

این مثالها نشانگر چیزی‌اند که آن را می‌توان "عنصر انسانی" در بــرهان‌نامید. (علاوه‌براین واقعیت بدیهی‌که برهانهارا انسان پدید می آورد.) برهان نوعی گفتگوی ریاضی‌است. کارکرد برهان‌متحدکردن ریاضیدانان به‌عنوان کارورزان یك‌ریاضیات واحد است. گاهی مطرح می‌شودکه با صوری کردن برهانها و ساختن ماشینهای برهان‌آزمایی می‌توانیم ازتأثیر خطاپذیری انسان بربرهانهای ریاضی بکاهیم. براین سخن ایرادی‌نیست؛ اما اگراین کاررا به‌عنوان نخستین گام در برنامه‌ای پنهانی بــرای احیای "حقیقت مطلق" ریاضیات بدانیم، بی‌شك محکوم به‌شکست خواهد بود. در واقع تفکر دربارهٔ اثباتهای صوری وماشینهای برهان‌آزمایی می‌تواند چشم‌انداز جالبی از کــم و کیف جنبهٔ انسانی برهان را روشن کند.

در وهلهٔ اول، سرچشمه‌های اجتناب‌ناپذیر اشتباه خودرا نشان مــی‌دهند: اشتباه در به‌قالب‌درآوردن برهان،اشتباه ناشی ازخستگی ضمن کار بــا بخشهای بسیار پیچیدهٔ موجود دربعضی‌برهانها وحتی‌اشتباههای احتمالی درکار خود ماشین. ثانیاً ومهم‌تراینکه، هر برهان تنها وقتی درماشین عمل می‌کند که به‌عنوان برهان پذیرفته شده باشد. این پذیرش کاری است که به‌توسط ریاضیدانان صورت می‌گیرد. حتی اگرحکم یك‌ماشین بــرهان آزمایی مورد قبول جامعهٔ ریاضیدانان واقــع شود، آنها حق تجدیدنظر و پذیرفتن برهانهای غیر صوری را برای خود حفظ می‌کنند.

فرما می‌نویسد: "ماهیت برهان آن است‌که فکررا در مسیر اجباری هــدایت کند." مادام‌که این اجبار ازطریق شهود عمل می‌کند، برهانهای (نسبتاً) غیرصوری همچنان‌نقش مهمی درریاضیات خواهند داشت. برهانهایی که سبب پیدایش شهود راجع به‌مفهومهای مورد نظر می‌شوند، برای ما که پژوهشگر و مدرسیم جالبتر و ارزشمندتر از برهانهایی هستند که صرفاً درست‌بودن یك قضیه را نشان می‌دهند. ما به‌برهانی‌علاقه داریم که‌محصول آن‌چیزی باشدکه بنیادی به‌نظر آید. اگرتنها برهان یك‌قضیه، برهانی مصنوعی یاساختگی باشد، برایمان ناخوشایند خواهد بود. دراین صورت جستجو و تفکررا ادامه می‌دهیم اما

به‌جای آنکه راه به‌جایی ببریم، متوقف می‌شویم. این حقایق ملموس را بدان خاطرذکر می‌کنم که تأکید کنم برهان‌صرفاً دستگاهی ازپیوندها میان قضایا، اصول وتعاریف گوناگون نیست بلکه علاوه بر آن دستگاهی است برای گفتگو میان اشخاصی که باریاضیات سروکار دارند. این نقش به‌طرق گوناگونی تجلی می‌یابد.

موجودات ریاضی

به‌طورسنتی بحثهای زیادی راجع به‌وجود موجودات ریاضی همچون اعداد،رسته‌هاو غیره درگرفته‌است. این امر ارتباط نزدیکی‌دارد بااین سؤال که‌آیا قضایای ریاضی کشف می‌شوند یامحصول ابداعند. میزان توجهی که به‌این‌گونه سؤالها مبذول شده فوق‌العاده حیرت‌انگیز است. دروهلهٔ اول به‌دشواری می‌توان تصورکردکه باپذیرش یکی ازدوشق، چه‌چیزی اثبات یانفی می‌شود. ثانیاً به‌نظر می‌رسد که این پرسش را نتوان جدی‌گرفت مگرآنکه وجود مبنایی به‌عنوان "حقیقت مطلق" برای اقدام به‌بحث، تلویحاً پذیرفته شده باشد. اما هرگاه چنین مبنایی درمعرض دید قرار گیرد، وجودش همان‌قدر مورد تردید است‌که امکان تشخیص آن.

گودل در [۹] راجع به‌موجودات مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها می‌گوید: " از موجودات مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها، علیرغم دور بودنشان از تجربهٔ حسی، چیزی شبیه دریافت حسی درما وجود دارد... من هیچ دلیلی نمی‌بینم که بخواهیم به‌این‌نوع دریافت اعتماد کمتری داشته باشیم... درمقایسه بادریافت حسی‌که امکان ایجاد نظریه‌های فیزیکی را پدید می‌آورد واین انتظاررا هم درما ایجاد می‌کندکه دریافتهای حسی آتی‌مان باید بااین نظریه‌ها تطبیق‌کند..." وی درادامه به‌این نکته اشاره می‌کندکه موجودات مربوط به‌تجربیات فیزیکی وجودشان برای ما به‌هیچ‌وجه بلاواسطه‌ترازموجودات ریاضی‌نیست. این عبارت (بخصوص قدری آن‌سوتر از بخشهای نقل شده) بیانگرموضع "افلاطونی" است، ولی من آنرا به‌دلایل دیگری دوست دارم. اولا به‌این دلیل‌که‌کاملا روشن می‌کند که موجودات مربوط به‌تجربهٔ فیزیکی، مدل زیربنایی برداشت ما از وجود را تشکیل می‌دهند. مدلهای "ظریفتر" ازطریق اصلاح و قیاس پدید می‌آیند. ثانیاً، به‌خاطر اینکه حاکی ازآن است که موجودات مربوط به‌تجربهٔفیزیکی ازدیدگاه بازتاب نظری به‌همان اندازهٔ موجودات ریاضی شایان تردیدند. می‌خواهیم راجع به‌موجودات ریاضی صحبت کنیم زیرامی‌خواهیم هنگام بحث راجع به‌آنها این‌حقیقت مسلم که درواقع ارتباطی‌برقرار کرده‌ایم بی‌معنی نباشد. اما چه دلیلی دارد که وجود آنها چیزی فراتر و آن‌سوتر ازاین (امکان) ارتباط باشد؟

تجربه‌گرایی

آخرین موضوع "فلسفی" که می‌خواهم راجع به‌آن بحث کنم، موضوع تفاوت بین‌ریاضیات و

علوم تجربی است. خوانندهای که مطلب را تااینجا دنبال کرده میداند کـه قصد ندارم وانمودکنم که "وضعیت واقعی" چیزها را توضیح میدهم، اینکاررا تنها بهشیوهٔ "مصادره بهمطلوب" میتوان انجام داد. بهجای اینکار، امیدوارم بـرخی از جنبههای ریاضیات و علوم تجربی راکه موجب ابهام این تمایز میشوند، مشخص کنم.

ازقرارمعلوم، تمایز فوق متکی براین امر بدیهی است که: درعلوم تجربی باواقعیت مادی سروکار داریم که تجربهٔ همهٔ انسانها در مورد آن یکسان است و اساساً بدان متکی است. درحالیکه ریاضیات بامفهومها سروکار دارد. (فعلا کاری بهاین سؤال نداریم کـه مفهومها راچهکسی میسازد.) درفصل دوم [۲۵] ، لاکاتوش این تمایـز را چنین بیان میکند: درمدلسنتی (اقلیدسی) ریاضیات، حقیقت ازبالا بهصورت اصول بلامنازع نازل شده و از طریق مجراهای استنتاجی بهسوی قضایای خاص فرود میآید. از سوی دیگر، علوم تجربی بااصول مسلم آغاز نمیشود؛ بلکهاینبار آنچه بلاتردید است، یعنی واقعیت حقایق عینی، درپایین قرارمیگیرد. دراینجا اشتباه ازپـایین بهبالا وارد فـرضهای نظری میشود. (اگر یك پیشبینی نظری با واقعیات ناهمخوان باشد، این خطا بهنظریه برگشت داده میشود ولزوم تصحیح آن مطرح میشود.)

لاکاتوش برآن است که برنامههای اقلیدسی برای ریاضیات توفیقی در بر نداشته و این ناکامی باعث شده است که گرایشی بهسوی تلقی ریاضیات بهعنوان علمی کـه بیشتر بهعلوم تجربی شباهت دارد، ایجادشود. نکتهٔ مهمتر اینکه، نگاهی دقیق بهنحوهٔ کارکرد ریاضیدانان و اینکه طی چهارصد سالهٔ اخیر چگونه کار کردهاند روشن میسازد که مدل اقلیدسی بههیچ روی در جهت توصیف ریاضیات نیست. (حداکثر میتوان گفت کـه این مدلی برای نمایش بخش قوامیافتهای از ریاضیات است؛ مدلی که مزایا وقابلیتهایش بحق جای بحث دارد.) درپنجاه سال اخیر این مدل دیگر حتی نمایشگر نحوهٔ تفکر فیلسوفان راجع بهریاضیات نیست.

طـی همین دوران مفاهیمی چـون "حقایق عینی" و "واقعیات ملموس" بـا ابهام فزایندهای همراه بودهاند. درایجاد اینوضع، تأملاتی که درمورد پیشرفتهای فیزیك نوین صورت گرفته دخیل بوده است. اما بررسی روانشناختی دریـافت حسی معمولی شواهد فراوانی درمورد بیپایه بودن مفهوم واقعیتی که دربرابر تأثیر نظری مصون است، عرضه کرده است. بهاینترتیب، مفاهیم ریاضیات و علوم تجربی هریك روبهسوی دیگری تغییر کرده است.

پیدایش توپولوژی جبری نمونهای ازتشابه بنیادی میان ریاضیات و علوم تجربی بهدست میدهد. آیلنبرگ[1] و استینراد[2] تنها پس ازدورهای که درآن مفاهیم درترکیبهای گوناگون آزموده میشدند، توانستند کتاب خود [۵] را بنویسند. مسائل دست اول ودر عین حال ایجاد یك معیار درونی میتوانست معلوم کند کدام ترکیبها ازهمه مناسبترند. آزمون اصول موضوع همواره چنین است: آیا جوابگوی جنبههای اساسا همخوانمسائلی

1. Eilenberg 2. Steenrod

که منشأ آنها بوده هستند؟

به‌نظر من، این وضعیت کاملا شبیه چیزی است که گاه در علوم انسانی پیش آمده است. گاهی اتفاق می‌افتد که یك اثر بخصوص، جوابگو ودر نتیجه بیانگر ماهیت فلان پیشرفت مغشوش است. (در اغلب موارد، این قضاوتی است که تنها باتوجه به گذشته می‌توان انجام داد.) به‌یادکتاب انحطاط غرب از اشپنگلر[1] می‌افتم؛ همچنین کتاب هستی و زمان اثر هایدگر. اثر چنین حوادثی شبیه بلورسرزی دریك ابر باران‌زا هستندکه منجر به‌پیدایش یك نقطهٔ تقطیر می‌شود. اگر مه به‌اندازهٔ کافی غلیظ باشد، تقطیر سریعاً گسترش می‌یابد و به‌زودی وضع دگرگون می‌شود. البته وجوه تشابه فراتر از اینهاست. با گذشت زمان نوعی جابجایی حادث می‌شود: به‌جای آنکه هستی و زمان را عصارهٔ جو فکری آلمان در دههٔ بیست قلمدادکنیم، رفته‌رفته گویی آلمان دههٔ بیست رااز پشت عینك هستی و زمان می بینیم.

به‌همین‌ترتیب، باپذیرفته شدن اصول موضوع مطرح شده برای یك نظریهٔ ریاضی خاص (نظریه‌ای که پیش از امکان تبیین اصول موضوع مـی‌باید قبلا ـ احیاناً به‌صورتی سازمان نیافته‌ـوجودمی‌داشته) این اصول از آن پس نظریهٔ مزبور را تعریف یـا تحدید می‌کنند. البته این پذیرش خود پدیده‌ای پیچیده باابعاد اجتماعی کاملا مشخص است.

پیشرفتی‌که درریاضیات توصیف‌کردم (و نیز تاحدی پیشرفت علوم انسانی) بسیار شبیه چیزی است کـه در علوم تجربی رخ می‌دهد. اگر بکوشیم وضعیتی کاملا فارغ از جنبه‌های نظری را درنظر آوریم، چنین به‌نظر خواهد رسیدکه "پدیده‌ها" انحصاراً خودرا نشان می‌دهند. دراین صورت جایی برای اغوا یا فریب باقی نخواهد ماند. من‌این‌وضعیت را حالت تجربهٔ بدوی می‌نامم. (البته ادعا نمی‌کنم چنین وضعیتی هیچ‌گاه جز به‌عنوان یك تصور نظری وجود داشته.) علوم تجربی به‌تدریج از تجربهٔ بدوی فاصله می‌گیرند؛ هدف آنها رده‌بندی این تجربه به‌صورت یك کلیت منسجم ومعقول است. (واژهٔ"کلیت" دراینجا مهم است. مثلا درنهایت مدلهای فیزیکی، زیستی واخلاقی ازانسان باید به‌طور کامل بایکدیگر انطباق یابند.) مفاهیمی از قبیل شیء، ماده، نیرو، جانور، محیط زیست،و غیره در علوم تجربی همان نقشی را دارندکه اصول موضوع دربخشی از ریاضیات ایفا می‌کنند. به‌این‌معنی‌که موجب سازمان دادن تجربیات می‌شوند ومقایسه (و علم) را ممکن می‌سازند. این عناصر باید توجیه‌کنندهٔ تجربـه باشند؛ هرچندکه این واقعیت قدری مبهم است، زیرا تجربیات ما هم خود براساس همین مبادی انجام می‌پذیرد.

سردرگمی راجع به‌تفاوت بین ریاضیات وعلوم تجربی تاحدزیادی ازاین‌امرناشی می‌شودکه برای ما مثلا درنظر گرفتن شیء مادی به‌عنوان یك ساختار نظری بـه‌مراتب دشوارتر ازانجام این‌کار درمورد عدد صحیح سه است. این دشواری ازسوی دیگری هم افزایش می‌یابد: مامجموعه‌های اشیا را برای پی‌ریزی تعریف بنیادی خود از عدد به‌کار می‌گیریم وبنا براین برای اشیا جنبهٔ "بنیادی" بیشتری قائل می‌شویم. سرانجام،این‌واقعیت

1· Spengler

که مطالب علمی را به‌زبان ریاضیات می‌نویسیم سبب می‌شود که ریاضیات را به‌عنوان محصول خلاقیت آزادانهٔ روح انسان قلمدادکنیم؛ برخلاف علوم مادی که "به‌واقعیتهای عینی چسبیده‌اند". امیدوارم نکاتی که ذکرکردم باعث کمرنگ‌ترشدن این تمایزشده‌باشد.

نتیجه

درپایان باید تأکیدکنم که طرفدار آموزش تاریخ یا فلسفه دربرنامه‌های درسی‌ریاضیات نیستم. بلکه معتقدم مدرس باید با این مباحث آشنایی کامل داشته باشد تا بتواند به‌نحو کارآمدتری تدریس کند. لابد برمن خرده خواهندگرفت که چرا به‌صراحت توضیح نمی‌دهم که چگونه درك تاریخ و فلسفه (در جوار ریاضیات) روی کارایی تدریس اثر می‌گذارد. دراین‌مورد بایدبه‌وضعیتی که قبلا شناخته‌شده متوسل شوم. وقتی درسی‌را ارائه می‌کنیدکه قبلا جمع وجور نشده است باید اطلاعات خیلی گسترده‌تری در مورد موضوع داشته باشید (در مقایسه باوقتی‌که روی یك موضوع محدود و مشخص صحبت‌می‌کنید). درغیر این صورت مبنایی وجود نداردکه براساس آن معلوم کنید بین راههای مختلفی که می‌توان درپیش گرفت ادامهٔ کدامیك ثمربخش‌تر خواهد بود. برای کارآمد بودن‌باید قبلا این راهها را شناسایی کرده باشید، نه‌اینکه فقط راهی را بشناسید که به‌مقصد منتهی می‌شود. به‌همین طریق ما در درسهای سطوح پایین‌تر، شیوهٔ حل انواع گوناگون مسائل را به‌شاگردان یاد می‌دهیم. ازدید دانش‌آموزان این‌روشها ابتدا دور ازتجربهٔ معمولی جلوه می‌کند وخیلی ازشاگردان ریاضیات را بواقع زبانی‌بیگانه قلمداد می‌کنند. فرصت چندان زیادنیست‌که بتوان به‌تفصیل نشان دادکه ریاضیات درپیدایش جهانی‌که وجودش را مسلم واجتناب‌ناپذیر می‌دانند واینهمه به‌نظرشان ازمباحث انتزاعی که باید فراگیرند دور است، چه نقشی داشته است. اما آگاهی ما نسبت به‌این‌نقش همواره می‌تواند برشیوهٔ کارمان اثر بگذارد؛ این تأثیر به‌صورت سهولت ووسعت درك تجلی‌می‌یابدکه به‌نوبهٔ‌خود متقاعدکننده‌تر ازکلام است.

مراجع

1. Benacerraf, Paul and Putnam, Hilary, *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
2. Blanshard, Brand, *The Nature of Thought*, Humanities Press, New-York, 1939.
3. Cantor, George,"Beitrage zur begrundung der transfiniten mengenieher," *Math. Ann*, **46** (1895) 481-412. English Translation: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, New York, 1955.

4. Davis Philip J. and Hersh, Reuben, *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin, Boston, 1981.
5. Eilenberg, Samuel and Stenrod, Norman, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1952.
6. Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, 5th ed., Saunders, Philadelphia, 1983.
7. Feyerabend, Paul, *Against Method*, Verso, London, 1978.
8. Gadamer, Hans-George, *Vom Zirkel des Verstehens*, in [30], pp. 24-34.
9. Gödel, kurt, *What is Contor's Continuum Problem?* in [1], pp. 258-273.
10. Goodman, Nicolas D., "Mathematics as on objective science," *Amer. Math. Monthly*, **86** (1979) 540-551.
11. Thomas, hvor, (trasl.), *Greek Mathematics*, Loe classical Library, Harward University Press, Cambridge, 1967.
12. Guthrie, W. K. C., *A History of Greek Philosophy*; Vol. 1, *The Earlier Peesocratics and Pythagoreans*; Vol. 2, *The Presocrtic Tradition from Parmenides to Democritus*, Cambridge University Press, 1962, 1965.
13. Heath, Thomas, *A History of Greek Mathematics*, Vol. 1, Dover, New York, 1981.
14. Heidgger, Martin, *Die Frage nach dem Ding*, Niemeyer, Tübingen, 1962, English Translation: *What is a Thing*, Henry Regnery, Chicago, 1967.
15. Heidegger, Mlartin, *Die Zeit des Weltbilds*, in Holzwege; 6th ed. Klosterman, Frankfurt am Main, 1980: English Translation: *The Age of the World Picture*, in the Question Concerning Technology, Harper, New York. 1977.
16. Heidgger, Martin, *Sein und Zeit*, 14th ed., Max Niemeyer, Tübingen, 1977. Enghlish Translation: *Being and Time*, Harper and Row, New York, 1962.
17. Heisenberg, Werner, *Grundlegende Voraussetzungen in der Physik der Elementarteilchen*, in [30], pp. 291-297.
18. Hersh, Reuben, "Some proposals for reviving the philosophy of

mathematics," *Adv. in Math.*, **31** (1979) 31-50.

19. Hofetader, Douglas R., Gödel, Escher, Bach: *An Eternal Golden Braid*, Basic, Books. New York, 1979.
20. Kitcher, Philip,*The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York, 1984.
21. Kline, Morris, *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, Oxford, 1980.
22. Körner, Stephan, *On the Relevance of Post-Godelian Mathematics to Philosophy*, in [27], pp. 118-132.
23. Kramer, Edna E., *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 1981.
24. Kuhn, Thomas S., *The Structure of Scientific Revolutions*, 2nd ed., University of Chicago Press, Chicago, 1970.
25. Lakatos, Imre, *Arenaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?*, in Mathematics Science and Epistemology, pp. 24-42.
26. Lakatos, Imre, *Mathematics, Science, and Epistemology*(Philosophical Papers, vol. 2), Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
27. Lakatos, Imre, (ed), *Problems in the Philosophy of Mathemtics* (Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1955) North-Holland, Amsterdam, 1967.
28. Lakatos, Imre, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
29. MacLane, Saunders, "Mathematical Models: A sketch for the philosophy of mathematics,"*Amer.Math.Monthly*,**88**(1981)462-472.
30. Neske, Günther, ed., *Martin Heidegger zum Siebzigsten Geburtstag*, Festschrift Neske, Pfullingen, 1959.
31. Polya, George, *Mathematical Discovery*, Wiley, New York, 1981.
32. Ritter, Joachim, ed., *Axiom. in Historisches Worterbuch der Philosophie*, vol. 1, Schwabe, Basel, 1971, pp. 737-748.
33. Smith, karl J., *The Nature of Mathematics*, 4th ed., Brooks/cole, Monterey, 1984.
34. Spengler, Oswald, *The Decline of the West*, vol. 1, Knopf, NewYork 1926.

35. Van der Waerden, B. L., "La demonstration dans les sciences exactes de l' antiquité," *Bulletin de la Societe Mathematique de Belgtque*, 1x (1957) 8-13.
36. Van der Waerden, B. L., *Science Awakening,* vol. 1. Noordhoff, Groningen, 1954.
37. Weil, Andre, *Number Theory, An Approach Through History*, Birkauser, Boston, 1983.
38. Wittgenstein, Ludwig, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, revised ed., MIT, Cambridge, 1978.

همهٔ ما اغلب می‌شنویم که ریاضیات عمدتاً با "اثبات قضایا" سر و کار دارد. آیا شغل یك نویسنده عمدتاً "جمله‌نویسی" است؟ حرفهٔ ریاضیدان آن پیچیدگیهایی را دارد که در پس حل معما، قیاس، خیالپردازی، و تسلیم، نهفته است، و "اثبات" قطعاً نمی‌تواند جوهر اصلی کشف باشد، زیرا که آن تنها سند اطمینانی است بر اینکه اندیشه‌مان ما را فریب نداده است.

جیان کارلو روتا