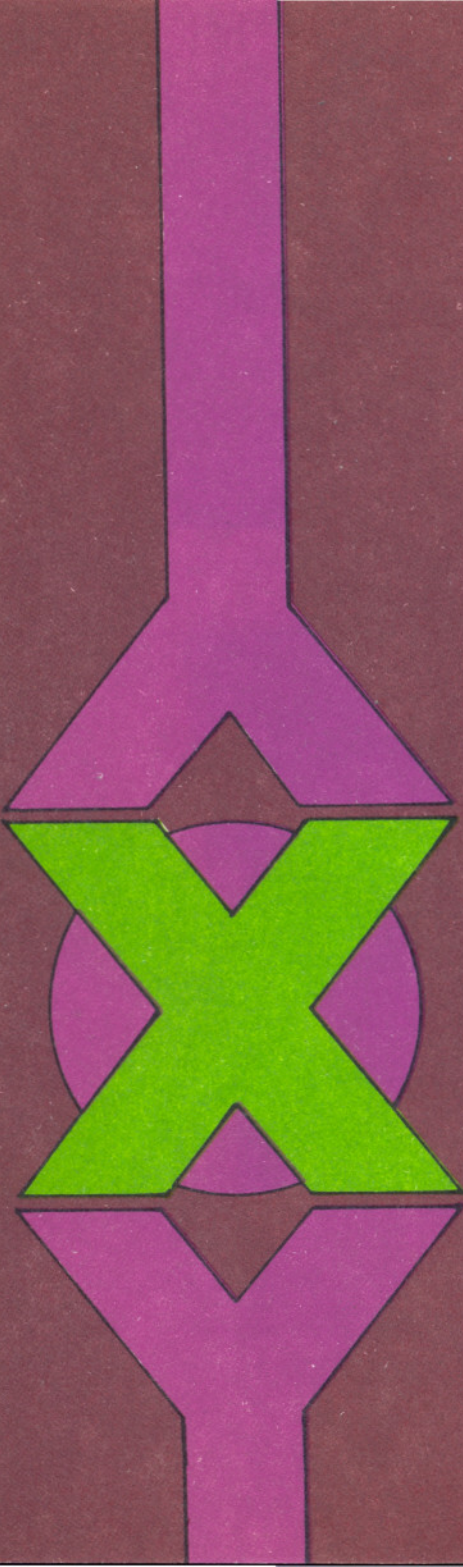
دانشگاه آزاد ایران

آشتی با ریاضیات



۱۴

شهریور ۱۳۵۹

آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری
زیر نظر هیئت تحریریه
از انتشارات جانبی دانشگاه آزاد ایران
صفحه آرائی و تصحیح: سازمان ویرایش و تولید فنی
چاپ و صحافی: مرکز تولید انتشارات دانشگاه آزاد ایران
نشانی: تهران ـ خیابان کریمخان‌زند ـ اول آبان‌شمالی ـ دانشگاه آزادایران

سال چهارم- شماره ۱ (۱۴)

فهرست مطالب

۵۰ ریال

نوشته: Raymond L. Wilder
استاد ریاضی دانشگاه میشیگان
ترجمه محمد باقری

روش اصولی

« Axiomatic Method»

از آنجا که برداشت و کاربرد کنونی در مورد روش اکسیوماتیك حاصل سیر تکامل دیرینه‌ای در تفکر انسان است، بحث در این زمینه باید مبتنی برتوضیح خلاصه‌ای از کاربردهای پیشین اصطلاح اکسیوم باشد. استفادهٔ فعلی از این اصطلاح نشانهٔ تعالی تفکر بشری است و برای حصول به درك عمیق نسبت به آن، باید با سیر تکوین آن آشنا شویم.

I ـ تکامل روش اکسیوماتیك

در کتب هندسهٔ مقدماتی که در دبیرستانها تدریس می‌شود، به دو گروه فرضیات بنیادی برمی‌خوریم: یکی تحت عنوان «اصول متعارفی» و دیگری «اصول موضوعه». این دو دسته اصول بصورت زیر مشخص می‌گردند:
«اصل متعارفی عبارت از حکمی است که صحت آن بخودی خود محرز باشد.»
«اصل موضوعه واقعیتی هندسی است و آنچنان ساده و آشکار است که میتوان صحت آنرا پذیرفت.»
اصول متعارفی شامل جملاتی بصورت زیر است:
«کل بزرگتر از هریك از اجزاءِ خود است.»
«کل مجموع اجزاءِ خود است.»
«چیزهای مساوی با یك چیز با یکدیگر مساویند.»
«اگر به دو مقدار مساوی، مقادیر مساوی بیافزائیم، حاصل‌ها برابرند.»
می بینیم که در جملات فوق کلماتی از قبیل «نقطه» و «خط» وجود ندارند. تا آنجا که

این اصول از قلمرو هندسه فراتر رفته و بصورت «حقایق کلی» در میآیند. در مقابل، اصول موضوعه بصورت جملاتی هستند که در زیر بیان می‌شود:
«یك وفقط یك خط راست می‌توان رسم کرد که از دو نقطه معین بگذرد.»
«خط را می‌توان تا بینهایت ادامه داد.»
«اگر خط L و نقطه P را در نظر بگیریم یك وفقط یك خط می‌توان رسم کرد که از P بگذرد و با L موازی باشد.»
(البته برای بیان جملات فوق قبلاً نیاز به ارائه بعضی «تعاریف» می‌باشد.)

این تقسیم‌بندی بصورت «اصول متعارفی» و «اصول موضوعه» سابقه‌ای کهن دارد. در آثار ارسطو (۳۸۴ـ۳۲۱ پیش از میلاد) به نقطه زیر برمی‌خوریم:
«هر علم استدلالی می‌باید برپایه اصول غیرقابل استدلال بنا گردد. زیرا در غیر اینصورت مراحل استدلال بی‌پایان خواهد بود. از این اصول غیر قابل استدلال برخی «a» برای تمام علوم مشترکند، و برخی دیگر «b» خاص یا مختص به یك علم خاص می‌باشند. گروه اول «a» اصول عمومی هستند که اصول متعارفی نامیده می‌شوند، و غالباً با این اصل بیان می‌شوند که: «اگراز دو مقدار مساوی، مقادیر مساوی کم کنیم، باقیمانده‌ها برابر خواهند بود». در گروه «b» نخست با مادهٔ اولیه یا موضوع مورد نظری سروکار داریم که وجود آن می‌باید پذیرفته شده باشد.»

۱

در کتاب «مقدمات» اقلیدس (که حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده.) دو گروه فوق به نامهای «تصورات عمومی» و «اصول موضوعه» خوانده شده اند. به کمك این اصول و با استفاده از مجموعه‌ای از «تعاریف»، اقلیدس موفق شد که ۴۶۵ قضیه را در یك سلسله منطقی استنتاج نماید. اگرچه زمینهٔ عملی کار اقلیدس برما روشن نیست ولی بنظر می‌رسد که او اولین کسی نباشد که به استنتاج منطقی قضایا برمبنای تعدادی قضیه اثبات نشده پرداخته است. چنانکه قبلاً ذکر شد، ارسطو و احتمالاً برخی دیگر از هم عصرانش، تصور صحیحی از ماهیت علوم استدلالی داشته اند و در مکتب افلاطون و نیز بین فیثاغورثیان، استنتاج منطقی قضایای ریاضی بکار گرفته می‌شد.

از آنجا که منشاءِ روش اکسیوماتیك برما روشن نیست، فقط می توانیم به بررسی دلایل گسترش آن بپردازیم. فلاسفهٔ قدیم یونان صور مختلف استدلال استنتاجی را

گسترش دادند و بی شك تا آن حد پیش رفته بودند که به لزوم نوعی اصول اولیه پذیرفته شده برای یك سیستم استنتاجی پی برده باشند. بعلاوه بحث و تفکر ریاضیدانان یونانی در مورد نتایج غیرمنطقی و پارادوکسهای «زنون» لزوم پایه گذاری محکمی را برای هندسه نشان داد که در قالب روش اکسیوماتیك اقلیدس تحقق یافت.

ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق . م.) در دو کتابی که به منظور پایه گذاری مکانیك نظری تدوین کرد، این روش اقلیدس را بکار گرفت. او در جلد اول آثارش پانزده قضیه را به کمك هفت اصل موضوعه اثبات نمود. کتاب «اصول ـ Principia» اثر معروف نیوتون نیز که در سال ۱۶۸۶ منتشر شد، بصورت یك سیستم استنتاجی تألیف شده است که در آن قوانین شناخته شدهٔ حرکت بصورت قضایای بدون اثبات؟ اصول موضوعه در آغاز کتاب ارائه شده است. بررسی مکانیك تحلیلی که توسط لاگرانژ در سال ۱۷۸۸ منتشر شد، بعنوان شاهکاری در تکامل سیستم منطقی شناخته شده است که در آن بطور صریح تعدادی قضایا پذیرفته شده و سایر قضایای سیستم بطریقهٔ استنتاجی حاصل و اثبات شده اند.

۲

نوشته های زیادی به بحث در مورد ماهیت اصول متعارفی و اصول موضوعه و زمینهٔ فلسفی آنها اختصاص یافته است. این امر از آنجا ناشی می شود که فقط در سالهای اخیر است که اصول موضوعه و متعارفی در رشته های دیگری از ریاضیات، بغیر از هندسه کاربرد گسترده ای یافته است. اگر چه متدی که توسط اقلیدس عمومیت یافت، امروزه پایه ای برای روش علمی در تمام زمینه های کاوش انسان شناخته می شود، برداشت فعلی از اصول متعارفی و موضوعه همانند درکی که عموماً از روش استنتاجی وجود دارد تا حد زیادی نتیجه مطالعاتی است که در حوزه هندسه بعمل آمده است. چون علم هندسه بعنوان کوششی در جهت توضیح فضای فیزیکی موجود که در آن بسر می بریم، قلمداد می گردید، لذا این اعتقاد راسخ بوجود آمد که اصول متعارفی و موضوعه دارای خصوصیت «ضرورت منطقی» گردند.

مثلاً اصل (موضوعه) پنجم اقلیدس (اصل توازی) می گوید: «اگر خطی دو خط دیگر را چنان قطع کند که زوایای داخلی ایجاد شده در یکطرف این خط مجموعاً کمتر از دو قائمه باشند، و آن دو خط را بمیزان نامحدود ادامه دهیم یکدیگر را در همان طرفی قطع می کنند که مجموع زوایای داخلی کمتر از دو قائمه است. پروکلوس (۴۸۵-۴۱۰ ق . م.) در آن زمان در آثار خود صریحاً نسبت به اصل پنجم اقلیدس

تردید نموده و در بدیهی بودن آن شك نمود. در دورهٔ رنسانس که علوم یونانی دوباره احیاء گردید، این تزلزل دوباره جلب نظر نمود. اقداماتی نیز در جهت اثبات اصل توازی به کمك اصول منطقی ـ ونه هندسی ـ صورت گرفت. بی شك اگر حکمی یك «ضرورت منطقی» باشد در صورت نادرست فرض نمودن آن باید به تناقض برسیم، این اساس مطالعات زیادی بود که در مورد اصول موضوعه هندسه انجام شد. با ابداع هندسهٔ غیر اقلیدسی بیهودگی همهٔ این کوششها آشکار گردید.

۳

پیشرفت هندسه های غیر اقلیدسی نشانهٔ رشد این فکر بود که اصل پنجم اقلیدس ماهیتی متفاوت با اصول یك تا چهار دارد، بعبارت دیگر این اصل موضوعه را نمی توان در ردیف سایر اصول هندسه اقلیدسی قرار داد. با تعویض مناسبی در اصل پنجم می توان به هندسه های بولیایی، لباچفسکی و گوس دست یافت که سیستم هایی سازگار (نامتناقض) بوده و در آنها اصل پنجم اقلیدس اعتبار خویش را از دست می دهد. در این صورت مثلاً قضیه ای خواهیم داشت که طبق آن مجموع زوایای داخلی مثلث کمتر از دو قائمه است. در سال ۱۸۵۴، ریمن هندسهٔ غیر اقلیدسی دیگری ابداع نمود که آن نیز بنوبهٔ خود مجموعهٔ سازگاری از قضایا بود و در آن *تمام خطوط دارای طول محدودند* و مجموع زوایای مثلث بیش از دو قائمه است.

ابداع هندسه های غیر اقلیدسی گوشه ای از پیشرفتهای سریع قرن نوزدهم در جهت پذیرفتن هندسه های نظری بود که کاری به علوم توصیفی در مورد فضا نداشت. کتاب «Ausdehnungslehre» اثر گراسمن که در سال ۱۸۴۴ دورهٔ دگرگونی سریع معیارهای اندیشهٔ بشری، منتشر شد، توسط مولف چنین توصیف شده است: «کتاب من پایه ای برای بررسی انتزاعی مفهوم فضاست و در واقع از قید تصورات عینی ما در مورد محیط فارغ است؛ بعبارت دیگر این ریاضیات کاملاً انتزاعی است و اعمال آن در مورد فضا منجر به علم فضا می گردد. علم فضا، چون به چیزی موجود در جهان مادی مربوط می شود (منظور همان فضا است) دیگر ریاضیات نامیده نمی شود، بلکه کاربردی از ریاضیات در زمینهٔ طبیعت می باشد.» ناگل در توضیح برداشت گراسمن از علم نظری می گوید: «خصوصیت علوم نظری آنست که اصول گسترش آنها قوانین منطقی هستند و قضایای آنها در مورد حوزه ای از جهان موجود نبوده بلکه در مورد آن چیزهایی است که بوسیله ذهن ما وضع گردیده است.»

۴

تعریفی که توسط گراسمن ارائه شد، در زمان حاضر نیز اعتبار خود را حفظ نموده است؛ بدین معنی که یك سیستم ریاضی موسوم به «هندسه»، الزاماً توصیف «فضای» موجود نیست. البته در اینجا بٰاید بین منشأ یك فرضیه و صورت تکامل یافته آن تمایز قائل شویم. هندسه همانند حساب، نتیجه مشاهدات ما از اشیاء واقعی است، اما این نظریه که هر نوع خاصی از هندسه، توصیفی از فضای فیزیکی است، در واقع یك قضاوت فیزیکی ـ ونه ریاضی ـ خواهد بود. بطور خلاصه، از دیدگاه نوین، باید میان «ریاضیات» و «کاربردهای ریاضیات» تفاوت قائل شویم.

این تغییر در نقطه‌نظر نسبت به یك سیستم ریاضی، طبعاً موجب آن گردید که ماهیت قضایای بنیادی اثبات ناپذیر، دوباره مورد بررسی قرار گیرد. این مطلب روشن شد که مثلاً «حکم عمومی» اقلیدس مبنی بر اینکه «کل همیشه بزرگتر از جزءِ خود است.» کیفیت انتزاعیش هم پایهٔ «اصل موضوعهٔ توازی» است و حتی خود مبتنی بر مفهوم «بزرگتر بودن» می‌باشد، در واقع ممکن است همچنانکه در تئوری بینهایت‌ها پیش می‌آید، این اصل از اعتبار ساقط گردد. با وجود آنکه بحث زیادی در گرفت که آیا اصل پنجم را می‌بایست «اصل موضوعه» یا «اصل متعارفی» به حساب آورد، سرانجام روشن گردید که از عمومیتی بیش از آن دیگری برخوردار نیست و در واقع می‌توان تمایز بین این دو مورد را نادیده گرفت. بدین ترتیب در آثار هیلبرت در زمینهٔ مبانی هندسه که در سال ۱۸۹۹ منتشر شد، می‌بینیم که وی تنها اطلاق یك اصطلاح اصل (متعارفی) axiom را برای فرضیات پذیرفته شده بنیادی کافی می‌داند و اصطلاحات اولیه‌ای چون «نقطه» و «خط» را یکسره تعریف نشده بر جای می‌گذارد. هیلبرت برای اطمینان، اصول خود را ـ در پنج گروه ـ دسته‌بندی کرد، اما در این کار فقط جنبهٔ تکنیکی قضایا را ـ و نه صحت یا عمومیت نسبی آنها را ـ مورد نظر داشت.

۵

اگرچه این کار هیلبرت را اولین جلوهٔ روش اصولی (اکسیوماتیك) بصورت نوین می‌شناسند، باید دانست که اندیشه‌های مشابهی در آثار هم عصرانش نیز ارائه گردیده بود.

در سال ۱۸۸۲، اولین چاپ کتاب «Varesungen» اثر «م. پاش» منتشر گردید. پاش در این کتاب، هندسه را بر اساس مفاهیم و قضایای «هسته‌ای» بدون هیچگونه تعریف و اثباتی مطرح نمود. او معتقد بود که این مفاهیم و قضایای بنیادی در تجربیات

انسان دارای درجه مشترکی از ادراك و قابلیت پذیرش هستند. پس از آنکه سیستم قضایای بنیادی (اصول) عرضه گردید، استنتاج منطقی سایر قضایای سیستم را می‌توان بهمان روش معمولی دبیرستانی دنبال کنیم. پاش عقیدهٔ خود را در این مورد چنین بیان کرده است.

«در حقیقت اگر قرار است که هندسه علمی استنتاجی باشد، این استنتاج می‌باید همواره مستقل از معنای مفاهیم هندسی و در نتیجه مستقل از شکل باشد، فقط از روابط تعیین شده در قضایا و از تعاریف موجود حق داریم استفاده کنیم. هنگام طی مراحل استنتاج، به تصور در آوردن معنی اصطلاحات گرچه مفید و کمك کننده خواهد بود ولی بهیچوجه الزامی نیست، در واقع، اگر لازم باشد که چنین عمل شود، این خود نشانهٔ نارسایی اثبات است. در هر حال، چنانچه قضیه‌ای بدشواری از یك مجموعهٔ قضایا ـ مجموعهٔ پایه استنتاج شود، نتیجهٔ حاصله دارای ارزشی بیش از آنچه نخست مورد نظر بوده، خواهد بود. زیرا اگر با تعویض اصطلاحات هندسی با برخی اصطلاحات دیگر در مجموعهٔ قضایای پایه، قضایای درستی بدست آیند، می‌توان این تعویض را بطور مشابه در قضیهٔ نتیجه نیز انجام داد، و بدین ترتیب قضیه‌ای جدید به عنوان نتیجه‌ای از قضایای پایه‌ای قبلی بدست آورد، بدون آنکه نیازی به تکرار اثبات باشد.»

احتمالاً نظام و تکامل منطقی کارهای «پاش» در نحوهٔ تفکر «پئانو» تاثیر گذارده است. لیکن «ناکل» در مورد کار این ریاضیدان اندیشه‌پرداز ایتالیائی می‌نویسد: «هیچ یك از جنبه‌های تجربی پاش در آثار پئانو منعکس نشده است؛ او هندسهٔ ناب را بصورت محاسبه دربارهٔ متغیرهایی که طبق روابط نظری خاصی بهم مربوطند، در آورد.» کتاب «اصول هندسه» پئانو که در سال ۱۸۸۹ منتشر شد، عناصر هندسه را صرفاً بعنوان «چیزها» در نظر گرفت و این اندیشه را که مورد تاکید پئانو بود ـ اثبات نمود که تعداد نسبتاً کمی از اصطلاحات تعریف نشده برای تعریف کردن سایر اصطلاحاتی که در هندسه ظاهر می‌شود، کافی است. او خاطرنشان ساخت که حتی‌المقدور تعداد این اصطلاحات (یا صرفاً نمادها ـ Symbol-) باید حداقل ممکنه باشد. پئانو در آثارش زبان منطق ریاضی را که خود یکی از بنیانگزارانش بود، بکار گرفت و بطور اساسی مطالبش را بر پایهٔ یك چیز تعریف نشده بنام «نقطه» و یك رابطهٔ تعریف نشده از «فاصله ـ between - ness» بنا نمود. مفهوم «فاصله» در بسیاری از نظام‌های پیشرفتهٔ هندسی که در اواخر قرن نوزدهم تکوین یافته‌اند، جنبهٔ بنیادی داشته است. پاش و هیلبرت هر دو این مفهوم را بکار گرفته‌اند. پئانو در اثر بعدیش در

زمینهٔ مبانی هندسه که در سال ۱۸۹۴ منتشر شد، به بحث در مورد استقلال اصول (اکسیوم) پرداخت.

۶

مطالعات کسانی چون پاش، پئانو، هیلبرت و پیری دربارهٔ هندسه اقلیدسی انگیزه تلاشهای فراوان برای یافتن نظام‌های نظری دیگری برای این سیستم کهن گردید، این ملاحظات بنوبهٔ خود درك نوبتی از معنی سیستم ریاضی بدست داد و در پیشرفت‌های چشمگیر ریاضیات در قرن بیستُم موثر واقع گردید. در میان سایر نظام‌های نوین هندسه اقلیدسی که از اهمیت بیشتری برخوردارند، می‌توان به اقدامات «پیری» اشاره نمود. «پیری» ایتالیائی که شاگرد پئانو بود در سال ۱۸۹۹ ـ همان سالی که هیلبرت کتابش را منتشر کرد ـ هندسهٔ اقلیدسی را بر اساس تجمع «نقاط» و یك مفهوم تعریف نشده بنام «حرکت» عرضه نمود. در سال ۱۹۰۴ «وبلن» سیستمی برای هندسهٔ اقلیدسی پیشنهاد کرد که در آن به جای مفهوم «بین ـ میان» betweenness که توسط پئانو و هیلبرت بکار رفته بود، یك رابطهٔ ترتیبی جایگزین شده بود. به پیشنهاد «ر. ل. مور» در سال ۱۹۱۱ سیستم وبلن دوباره مورد بررسی قرار گرفت. (رابینسون ترکیب مناسبی از سیستم اصولی (اکسیوماتیك) هیلبرت و وبلن را در هندسهٔ اقلیدسی مورد استفاده قرار داد.)

باید توجه داشت که این مطالعات اولیُه در زمینهٔ هندسه، موجب بروز نتایجی کلی می‌گشت که تاثیر ماندگاری در ریاضیات نظری بجای گذارد. تکامل ریاضیات در جهت گسترش روشی بود که بتواند اصطلاحات تعریف نشده و عبارات انتزاعی از قبیل «مجموعه» و «فضای انتزاعی» را که ظاهراً در رشته‌های جداگانه‌ای از ریاضیّات ظاهر می‌شدند، در یك چهار چوب واحد، در بر بگیرد.

II ـ بیان روش جدید؛ اصطلاحات و اصول تعریف نشده

روش اصولی (اکسیوماتیك) بصورتی که امروزه در ریاضیات بکار میرود، عبارت است از ارائه قضایای (اصول) معینی دربارهٔ موضوع مورد مطالعه (مثلاً هندسه مسطحه)، با استفاده از برخی اصطلاحات تکنیکی تعریف نشده مربوط به زمینه مورد مطالعه و اصطلاحات منطق کلاسیك. غالباً هیچگونه توضیحی در مورد معنی اصطلاحات منطقی داده نمی‌شود و هیچ قاعده ای در مورد بکار گرفتن آنها و یا در

مورد روشهای قابل قبول برای اثبات قضایا ارائه نمی‌شود. قضایای بنیادی همان اصول متعارفی (axioms) هستند. در اثبات قضایا، غالباً می‌توانیم از قوانین منطق کلاسیك در مورد «تناقض» و «عدم ارتباط منطقی» استفاده کنیم، از اینرو در بسیاری موارد از «برهان خلف» برای اثبات قضایای مورد نظر استفاده می‌شود. جملات بیان کنندهٔ اصول و قضایای حاصل از آنها «مستتردر» یا «منتج از» اصول (اکسیومها) دانسته می‌شوند. در اینجا ذکر یك مثال، روشن کننده خواهد بود.

۷

بگذارید دوباره همان هندسه مسطحه را در نظر بگیریم. البته لزومی به یادآوری همه مطالب نیست. بی‌شك خواننده بیاد دارد که در هندسهٔ مسطحه «نقطه»، «خط راست» و نیز مفهوم «توازی» خطوط، مفاهیمی بنیادی هستند. حال اگر بخواهیم یك سیستم اصولی (اکسیوماتیك) برای هندسه مسطحه به روش جاری در ریاضیات امروزه بنا کنیم، ابتدا می‌باید اصطلاحاتی را که می‌خواهیم بدون تعریف بپذیریم، انتخاب کنیم. مثلاً می‌توانیم «نقطه» و «خط» را بپذیریم (صفت «راست» را برای خط می‌توان حذف نمود زیرا خصوصیت تعریف ناپذیری «خط» در این سیستم بما امکان میدهد که مفهوم «راست» بودن را در کلمه خط مستتر و منظور بداریم شبیه این کار را بعداً در مورد انتخاب اصول نیز انجام خواهیم داد). در قدم بعد به قضایای هندسه مراجعه نموده و سعی می‌کنیم مجموعه ای از آنها را بعنوان «قضایای پایه» انتخاب کنیم، با این معیار که اولاً نسبتاً ساده باشند و ثانیاً به کمك آنها سایر قضایا را (که انتخاب نشده‌اند) اثبات کنیم. این مجموعه را «قضایای نخستین» یا «اصول» بدون اثبات در سیستم خود می‌نامیم.

۸

برای وضوح بیشتر، بگذارید چگونگی عمل فوق را چنانکه در واقع انجام گرفت طی کنیم؛ هرچند که در اینجا قصد ما ارائه سیستم کاملی از اصول نیست ذیلاً نمونهٔ خلاصه ای از مجموعهٔ اصول و قضایای ثانویه (قابل اثبات) را بهمراه مثالهایی از اثبات قضایای ثانویه دنبال می‌کنیم:

اصطلاحات تعریف نشده: نقطه؛ خط

اصل ۱: هر خط مجموعه‌ایست از نقاط.

اصل ۲: حداقل دو نقطه وجود دارد.

اصل ۳: اگر p و q دو نقطهٔ مجزا باشند، یك و فقط یك خط وجود دارد که شامل p و q باشد.

اصل ۴: اگر L یك خط باشد، نقطه‌ای مانند p وجود دارد که روی L نباشد.

اصل ۵: اگر L یك خط و p نقطه‌ای غیر واقع بر آن باشد، یك و فقط یك خط وجود دارد که از p بگذرد و با L موازی باشد.

این اصول بهیچوجه پایهٔ مناسبی برای اثبات تمام قضایای هندسهٔ مسطحه نیست، اما میتوان بکمك آنها تعدادی از قضایا را که در تمام نظام‌های هندسهٔ اقلیدسی وجود دارند، اثبات نمود. انتخاب آنها باین سبب بوده است که: اولاً، اصطلاحات تعریف نشدهٔ «نقطه» و «خط» باید نقشی همانند متغیرها در جبر داشته باشند. بدین ترتیب، در رابطهٔ: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

x و y تعریف نشده اند، باین معنا که می توانند نمایش هر عدد دلخواهی در قلمرو معینی از اعداد (مثلاً قلمرو اعداد صحیح) باشند. در مثال حاضر، «نقطه» می تواند هر عنصر یگانه‌ای از یك قلمرو باشد. و فقط کافی است که بتواند در شرایط عرضه شدهٔ اصول پنجگانهٔ فوق صدق کند. از طرف دیگر همانطور که در اصل ۱ ذکر شده، «خط» فقط می تواند بصورت مجموعه‌ای از عناصر در نظر گرفته شود که در اینجا «نقاط» می باشند. بنابراین، اصل ۱ بمنظور ایجاد رابطهٔ بین دو مفهوم تعریف نشدهٔ «نقطه» و «خط» بیان گردیده است. این جمله را نمی توان تعریف خط به حساب آورد زیرا (با مراجعه به معلومات قبلی از هندسه) مجموعه‌های دیگری از نقاط وجود دارند (دایره، مثلث و غیره) که خط نیستند. بعلاوه این اصل به ما امکان میدهد که بتوانیم اصطلاحاتی را که در اصلهای بعد وارد می‌شوند، تعریف نمائیم. اصل ۲ اولین قدم برای وارد کردن خطوط به این هندسه است و این منظور با افزودن اصل ۳ تکمیل می‌شود. برای آنکه اصل ۳ بر پایه مفاهیم تعریف شده استوار باشد، پیش از بیان آن ناگزیر به ارائه تعریف زیر هستیم:

می‌شود. برای آنکه اصل ۳ بر پایه مفاهیم تعریف شده استوار باشد، پیش از بیان آن ناگزیر به ارائهٔ تعریف زیر هستیم:

۹

تعریف: اگر نقطهٔ p عنصری از مجموعه نقاطی باشد که خط L را تشکیل می‌دهند، در اینصورت هر یك از بیان‌های زیر مورد قبول است: L شامل p است، p روی L واقع است یا L خطی است که p را شامل می‌شود.

با بیان اصول ۲ و ۳، تا این مرحله پیش رفته ایم که در هندسهٔ ما یك خط وجود دارد. اما چون نمی خواهیم به یك خط یا بعبارت دیگر به هندسهٔ یك بعدی اکتفا کنیم، بلکه منظور ما رسیدن به هندسهٔ مسطحه است، باید توسط اصل دیگری این مطلب را تأکید کنیم که همهٔ نقاط روی یك خط قرار ندارند. اصل چهارم این منظور را تأمین می کند. حال ممکن است احساس کنیم که عملاً به صفحه دست یافته ایم (زیرا خط L و نقطهٔ p غیر واقع بر آن و همچنین خطی را که شامل p و هر نقطهٔ خط L باشد، داریم)، با اینحال، تا زمانی که اصل ۵ را بیان نکرده ایم، هنوز به توازی خطوط که در هندسهٔ اقلیدسی وجود دارد اشاره ای نکرده ایم. البته برای بیان اصل ۵ لازم است که قبلاً تعریف زیر را داشته باشیم:

۱۰

تعریف: دو خط L_1 و L_2 متوازی خوانده می شوند اگر هیچ نقطه ای وجود نداشته باشد که هم روی L_1 و هم روی L_2 واقع باشد. (در اینصورت همچنین میتوان گفت «L_1 موازی با L_2 است.» و بالعکس)

۱۱

مجموعهٔ فوق از اصول پنجگانه را بانضمام اصطلاحات نقطه و خط به Γ «گاما» نشان داده و «سیستم اصول Γ» نامیم.

(بسیاری از اوقات هم، اصطلاح «سیستم اصولی» بمعنی گسترده تری بکار میرود که در آنجا قضایای ناشی از اصول اولیه نیز جزو این سیستم شمرده می‌شوند.)

برای سهولت در ادامهٔ بحث، بدون آنکه وارد بحثی مشروح شویم، به دو جنبهٔ مختلف از Γ توجه می کنیم: ۱ـ علاوه بر اصطلاحات هندسی مانند نقطه و خط، در اینجا کلماتی نظیر «مجموعه»، «وجود دارد»، «یك»، «هر»، «نه»: علامت منفی» را بکار گرفته ایم که می توان آنان را اصطلاحات عمومی (یا گاهی اوقات «منطقی») نامید زیرا می پذیریم که معنی آنها ثابت و برای همه به یك مفهوم درك شدنی است (قابل مقایسه با عبارت «مشترك برای تمام علوم» از ارسطو). ۲ـ «سیستم اصول Γ» برای رسیدن به هندسهٔ مسطحه کافی نیست زیرا نقطه و خط در آن تعریف نشده اند و ما می توانیم آزادانه هر معنائی برای آنها درنظر بگیریم، البته، با این شرط که اصول پنجگانه را بتوان در مورد آنها اعمال نمود. برای ما که قبلاً با هندسهٔ دبیرستانی آشنایی داریم، شنیدن این نامها بلافاصله نمایش تصویری از آنان را در ذهن ایجاد می نماید. حال

فرض کنیم که این مفاهیم بکلی برای ما ناآشنا باشد، هر چند که اصطلاحات عمومی بکار رفته در اصول را می‌شناسیم و بدین ترتیب، هر معنای ممکن دیگری را برای نقطه و خط می‌پذیریم. بی شك پیش از آنکه به نتیجهٔ قابل قبولی دست یابیم، می باید حالات مختلفی را آزمایش کنیم. مثلاً به فرض نقطه را بمعنی «کتاب» و خط را به معنی «کتابخانه» در نظر میگیریم. از اصل یکم می‌دانیم که خط مجموعهٔ تعدادی از نقاط است و کتابخانه هم یك مثال آشنا از مشاهدات روزمره ما برای «مجموعه» است. فرض کنید ما در شهر c زندگی می کنیم که دو کتابخانهٔ متمایز دارد. منظور ما از کلمهٔ «کتابخانه» هر یك از دو کتابخانه و منظور ما از «کتاب» هر کتابی از این کتابخانه‌ها می تواند باشد. اصل دوم در این مثال صادق است: «حداقل دو کتاب وجود دارد». اما اصل ۳ از اعتبار می افتد زیرا اگر p و q کتابهایی در کتابخانه‌های متفاوت باشند هیچ کتابخانه ای نیست که شامل p و q باشد. پیش از آنکه بدنبال معانی دیگری برای نقطه و خط برویم، به این نکته توجه کنیم که اصول ۴ و ۵ صادق هستند؛ بدین معنی که: «اگر L یك کتابخانه باشد، کتابی وجود دارد که در آن واقع نباشد» و «اگر L یك کتابخانه و p یك کتاب غیر واقع در آن باشد، در اینصورت یك و فقط یك کتابخانه وجود دارد که شامل p بوده و با L موازی باشد (هیچ کتاب مشترکی با L نداشته باشد)».

حال که مثال بالا به بخاطر عدم ارضای اصل ۳ کنار گذاشته شد، سعی میکنیم این بار برای ارائه معانی جدیدی در مورد نقطه و خط، جامعه‌ای از افراد را در نظربگیریم (Z) که در آن هر کسی به یك باشگاه وابسته است، لیکن به گونه ای که اگر p و q دو فرداز Z باشند، یك و فقط یك باشگاه می توان یافت که p و q هر دو، عضو آن باشند. بعبارت دیگر این بار تعبیر ما از «نقطه»، یك فرد متعلق به Z و همچنین تعبیر ما از «خط»، یك باشگاه در Z است و فرض می کنیم که وضعیت باشگاهها طوری است که شرط فوق‌الذکر برقرار باشد و در نتیجه اصل ۳ در این مثال صحت داشته باشد. بسادگی می‌توان دریافت که اصول یك، دو و چهار نیز صادقند: «یك باشگاه در Z عبارتست از مجموعه ای از افراد در Z»، «حداقل دو فرد در Z وجود دارند»؛ الی آخر. با تغییر مناسب در کلمات، اصل پنجم باین صورت در می آید: «اگر L باشگاهی در Z و p فردی خارج از L باشد، یك و فقط یك باشگاه در Z وجود دارد که p عضو آن باشد و آن باشگاه هیچ عضو مشترکی با L نداشته باشد». این عبارت شرط خاصی برای وضعیت باشگاه‌ها در Z قائل میشود و می توان مواردی را تصور نمود که این شرط صادق نباشد. بهر صورت با در نظر گرفتن اینکه فقط یك باشگاه وجود دارد که دو فرد

مشخص عضو آن باشند، تحقق اصل ۵ مشکل بنظر میرسد. فرض می کنیم که Z مجموعه‌ای از ۳ نفر باشد که آنها را به a و b و c نمایش میدهیم. همچنین فرض می‌کنیم به دلایلی، هر دو نفر از این جمع، راز مشترکی بین خود دارند که از شخص سوم پنهان می‌دارند و در نتیجه از جنبهٔ اشتراك راز، تشکیل گروه های ab و ac و bc را میدهند. حال با این تعبیر از خط و نقطه، طبق روشی که داریم، می بینیم که اصول یك تا چهار صادق هستند ولی اصل پنجم قابل قبول نیست.

حال پیش از آنکه این مثال را یکسره کنار نهیم، فرض می کنیم که z شامل چهار فرد a و b و c و d باشد و هر دو نفر از این جمع تشکیل باشگاهی بدهند که دو نفر دیگر عضو آن نباشند؛ بدین ترتیب، شش باشگاه بصورتهای ab, ac, ad, bc, bd و cd وجود خواهد داشت. می بینیم که همهٔ اصول Γ با در نظر گرفتن معنی فردی در Z برای «نقطه» و باشگاهی در Z برای «خط» تحقق می‌یابند. و مشاهده میشود که اگر هر مجموعهٔ چهار عضوی بنام Z شامل a و b و c و d را در نظر بگیریم و منظورمان از نقطه، هر عنصر از مجموعهٔ Z و منظورمان از خط، هر جفت از عناصر Z باشد، به نتیجهٔ مشابهی می‌رسیم و اصول Γ در این مورد صادق خواهند بود.

۱۲

گرچه در اینجا تاکید بخصوصی روی یك مثال خاص نداریم، با اینهمه جستجوی انواع تعبیرات مختلف از Γ خالی از فایده نخواهد بود و بدنبال خود سوالاتی بهمراه خواهد داشت از این قبیل که «یك مجموعه باید چند «نقطه» داشته باشد تا بتوان آنرا بعنوان مثال برای سیستم Γ در نظر گرفت؟»، «برای یك مجموعهٔ مورد نظر، هر خط باید شامل چند نقطه باشد تا اصول Γ برقرار باشد؟» (مثلاً در مثال فوق که Z شامل چهار فرد بود، یك خط نمی‌تواند شامل سه فرد باشد). بعلاوه با تکیه بر آشنائی قبلی که با هندسهٔ مسطحه داریم، روشن است که سیستم Γ برای ایجاد و بیان هندسهٔ اقلیدسی کافی نیست. در واقع یك مجموعه مناسب برای هندسهٔ مسطحه، این امکان را که فقط با چهار نقطه همهٔ اصول ارضا گردند، رد میکند.

پیش از آنکه در این بحث کلی جلوتر برویم، به بررسی نحوهٔ اثبات قضایا به کمك سیستمی اصولی مثل سیستم Γ می‌پردازیم.

با در دست داشتن سیستمی از اصول، مثلاً سیستم Γ، می‌خواهیم ببینیم که چه قضایایی را می‌توانیم توسط آن اثبات یا استنتاج نماییم. برخلاف روش متداول در دبیرستان، که طی آن بسیاری از قضایا و فرضیات و مفاهیمی را که در اصطلاحات و اصول اولیه ارائه نشده بود، بکار میبردیم (مثل مفهوم «ضخامت» که می‌گفتیم «خط ضخامت ندارد.»)، و نیز شکلهایی می‌کشیدیم که طبعاً با اینکار، بعضی خواص هندسی بطور ضمنی مستتر می‌گردید، در اینجا اتکاءِ ما فقط به مفاهیم نقطه و خط و آن عده از روابط و خواص ایندو است که در سیستم اصول بیان گردیده است. (البته وقتی حکمی را ثابت کردیم، می‌توانیم در اثبات قضایای بعدی، از آن حکم بدون لزوم اثبات مجدد، استفاده کنیم). در مورد استفاده از شکل هم مجاز هستیم بشرط آنکه مراجعه به شکل فقط بعنوان کمك به ارائه اثبات باشد و موجب پذیرفتن فرضیاتی که در اصول اولیه عرضه نگردیده است، نباشد؛ در واقع، عملاً در یاضیات از ترسیم شکل کمك گرفته می‌شود. در این مورد خواننده می‌تواند به توضیحی که «پاش» در این زمینه داده است، به قسمت ۵ـ۱ مراجعه نماید.

۱۳

در زیر، نمونه‌ای از یك قضیه و اثبات آن بیان می‌شود:

قضیهٔ ۱ـ هر نقطه اقلاً روی دو خط متمایز قرار دارد.

اثبات: نقطه ای مانند P را در نظر میگیریم. چون بنا به اصل ۲ حداقل دو نقطه وجود دارد، پس غیر از P، نقطهٔ دیگری بنام q نیز موجود است. و بنابه اصل ۳، خطی مانند L وجود دارد که شامل p و q باشد. همچنین برطبق اصل ۴، نقطه ای مانند r وجود دارد که روی L نباشد و (دوباره به کمك اصل ۳)، خطی مانند k موجود است که شامل p و r باشد.

حال با توجه به اصل ۱، هر خط مجموعه ای از نقاط است. بنابراین، برای آنکه دو خط متمایز (مختلف) باشند، باید مجموعه هائی که آنها را تشکیل می‌دهند، مختلف باشند؛ یا بزبان دیگر، یکی از آنها شامل نقطه‌ای باشد که روی دیگری واقع نباشد. پس دو خط L و k متمایزند، زیرا k شامل نقطهٔ r است که روی خط L نیست. بنابراین چون p روی k و L قرار دارد، قضیه ثابت شده است.

۱۴

توجه کنید که طی اثبات قضیه فوق، از اصول ۱ تا ۴ استفاده کرده ایم ولی اصل پنجم را بکار نگرفته ایم. حال می‌توانیم به مثال اجتماع z باز گردیم و با جانشین کردن فرد بجای «نقطه» و یك زوج از افراد بجای «خط»، اصول ۱ تا ۴ را مجدداً با کلمات جانشین شده بیان کنیم و به کمك آنها، قضیه ۱ را در شکل جدیدش اثبات کنیم. بدین ترتیب، می بینیم که قضیهٔ ۱ برای هر مثالی (مثلاً z)، که در اصول ۱ تا ۴ صدق کند، «صحت» دارد. به عبارت دیگر، با اثبات قضیهٔ ۱ توانسته‌ایم قضایای متعددی را در مورد مثالهای متعددی اثبات کنیم و این قضایا همان مثالهایی هستند که اصول ۱ تا ۴ در موردشان صادق است. این جنبهٔ «صرفه جوئی» را که از روش اصولی (اکسیوماتیك) حاصل می‌شود، بعداً مورد بحث بیشتر قرار خواهیم داد. اگر به علت استفاده از شکل یا هر عامل دیگری، خواصی از نقطه و خط را که در اصول ۱ تا ۴ مطرح شده اند، بکار میگرفتیم، دیگر این کلیت که بدان اشاره کردیم برجای نمی‌ماند و جنبهٔ «صرفه جویی» در استدلال قضایا از میان میرفت.

باید توجه داشت که قضیهٔ ۱ در هر سیستم اصولی (مثل Γ) که شامل مفاهیم تعریف نشدهٔ «نقطه» و «خط» و نیز اصول ۱ تا ۴ باشد، صحیح است. در حالت خاص، این قضیه در هندسهٔ مسطحه نیز که خود یکی از هندسه‌های متعددی است که شامل چهار اصل فوق می‌باشد، صحیح است. و همانطور که قبلاً گفتیم، برای ایجاد و گسترش آن علاوه بر اصول فوق به اصل‌های بیشتری نیاز است.

۱۵

حکم زیر را به عنوان «نتیجهٔ» قضیهٔ ۱ در نظر می‌گیریم

نتیجه: هر خط حداقل شامل یك نقطه است.

۱۶

پیش از آنکه به اثبات «نتیجهٔ» فوق بپردازیم، به نکته‌ای که در اینجا به ذهن میرسد، توجه می‌کنیم؛ با توجه به اینکه در اصل ۱ «خط» صراحتاً بصورت مجموعه‌ای از نقاط تعریف شده است، واضح است که حداقل شامل یك نقطه می‌باشد و دیگر تکرار این مطلب بصورت نتیجه‌ای از قضیه ۱ چه لزومی دارد؟ نکته‌ای که اینجا مطرح می‌شود، از اهمیت خاصی برخوردار است و به معنای اصطلاح «مجموعه» مربوط می‌شود و این خود سئوالی است که در ریاضیات مدرن

مورد تعمق قرار گرفته است. قبلاً گفتیم که «مجموعه یك اصطلاح کلی تعریف نشده است و ما در اینجا مفهومی از آنرا که بطور طبیعی به ذهن هر کسی که با زبان فارسی آشناست، میرسد، در نظر گرفته‌ایم. با اینهمه، در این مورد خاص لازم است که توضیحی برای کار برد، این کلمه، در نتیجهٔ فوق از قضیهٔ ۱ ارائه دهیم.

برای آنکه به سئوال فوق پاسخ دهیم باید بیاد داشته باشیم که هرگاه لازم باشد کلمه‌ای را که در محاورهٔ روزمره به کار می‌رود، برای بیان مفهوم دقیقی استفاده کنیم، باید قراردادهای خاصی را در نظر گیریم. مثلاً کلماتی نظیر «سبزی»، «میوه»، «حیوان» در گفتگوی عادی بکار میرود و هر کس که با زبان فارسی آشنا باشد معنی آنها را در می‌یابد، اما وقتی بخواهیم در موارد خاصی از آنها[4] استفاده کنیم باید قبلاً قرار دادهایی عرضه شده باشد، مثلاً اینکه موجوداتی از قبیل نهنگ هنگام دسته بندی جانوران جزو پستانداران، (و نه ماهی‌ها) به حساب آیند. بدین ترتیب، بعنوان مثال می توانیم قرار بگذاریم که اگر شخص A از «مجموعهٔ سکه‌های موجود در جیبهای شخص B» صحبت می کند، حتی وقتی که شخص B هیچ سکه‌ای نداشته باشد، این عبارت دارای مفهوم باشد. بعبارت دیگر، چه شخص B دارای سکه‌ای باشد و چه نباشد، ما همیشه این مجموعه را موجود فرض می‌کنیم. هرگاه شخص B دارای سکه‌ای نباشد، می گوئیم مجموعهٔ مذکور «تهی» است. (در موردی که شخص B دارای سکه‌ای نیست، باز هم می‌توان از «سکه‌های موجود در جیب شخص B» صحبت کرد، اما در این حالت عبارت پیشین به چیزی که وجود داشته باشد، اطلاق نمی‌گردد.) این قراردادی است که همیشه در ریاضیات و منطق پذیرفته می‌شود و برطبق آن، مجموعه‌هایی می‌توانند وجود داشته باشند که دارای هیچ عنصری نباشند، مثل مجموعهٔ سکه‌هایی که در جیب شخص B وجود دارد، اگر چه آن مجموعه تهی باشد.

در بیان جبر مجموعه‌ها خواهیم دید که به دلیل دیگری، ناگزیر از مطرح نمودن مجموعه‌های تهی هستیم و این همانند دلیلی است که در علم حساب، تعریف عدد «صفر» را ایجاب می نماید.

۱۷

اثبات «نتیجهٔ» قضیهٔ ۱: بنابه اصل ۲، نقطه‌ای مانند p وجود دارد و برطبق قضیهٔ ۱، دو خط مختلف، L_1 و L_2 که شامل p باشند وجود دارند.

حال اگر خطی مانند L وجود داشته باشد که شامل هیچ نقطه‌ای نباشد، L_1 و L_2

(طبق تعریف) با L موازیند. و چون این با اصل ۵ مغایرت دارد، بنابراین خطی مانند L نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۱۸

در قضیهٔ زیر حکمی مهم‌تر از «نتیجهٔ» فوق عرضه می‌گردد:

قضیه ۲: هر خط اقلاً شامل دو نقطه است.

اثبات: خطی مانند L را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که L حداقل شامل دو نقطه می‌باشد. طبق «نتیجهٔ» فوق، L شامل نقطه‌ای مانند p است و بنا به قضیه ۱ خط دیگری مانند K نیز موجود است که شامل P باشد. یا L و یا k باید شامل نقطه‌ای مانند q غیر از p باشد زیرا در غیر اینصورت مجموعهٔ تشکیل دهندهٔ این دو خط، یکی بوده و در نتیجه k و L یك خط خواهند بود (اصل ۱). اگر q روی L باشد، قضیه ثابت شده است. فرض می کنیم q روی k باشد. بنا به اصل ۴ نقطه‌ای مانند x وجود دارد که روی k واقع نباشد و بنا به اصل ۵، خطی مانند M وجود دارد که شامل x بوده و با k موازی باشد. دو خط L و M باید نقطهٔ مشترکی مانند Y داشته باشند، زیرا در غیر اینصورت L و k دو خط خواهند بود که شامل p بوده و موازی با M باشند و این مغایر با اصل پنجم است. چون p روی M نیست، پس p و y دو نقطهٔ متمایزند در نتیجه L حداقل شامل دو نقطهٔ متمایز p و y است.

حال، از آنجا که بنا به قضیه ۲ هر خط اقلاً شامل دو نقطه است و چون بر طبق اصل ۳ دو نقطه داده شده می توانند روی یك خط قرار داشته باشند، نتیجهٔ زیرا میتوان بیان نمود:

«نتیجهٔ» (حاصل از قضیه۲). هر خطی بوسیلهٔ دو نقطه متمایز واقع بر آن کاملاً مشخص می‌شود.

۱۹

قضیه ۳: حداقل چهار نقطهٔ متمایز وجود دارد.

اثبات: بنا به اصل ۲ حداقل دو نقطهٔ متمایز p و q وجود دارند. بنا به اصل ۳ خطی مانند L موجود است که شامل p و L باشد و بنا به اصل ۴ نقطه‌ای مانند x غیر واقع بر L وجود دارد. بنا به اصل ۵ خطی مانند L شامل x و به موازات L وجود دارد و بنا به قضیهٔ ۲ L حداقل شامل دو نقطهٔ متمایز است.

۲۰

قضیهٔ ۴: حداقل شش خط متمایز وجود دارد.

پیش از آنکه قضیهٔ ۴ را ثابت کنیم، بد نیست به تصور مشترکی که از مفهوم «تمایز» داریم، دقت کنیم. معنی این کلمه در کاربردی که دارد بدین معنی است که دو مجموعه وقتی متمایز نامیده می‌شوند که «یکی» یا «یکسان» نباشند. بنابراین، دو خط L و k در قضیهٔ ۲ «متمایز» هستند، k (تا وقتی عکس آن ثابت نشده) ممکن است عملاً شامل L باشد، زیرا L و k یك خط نیستند (k شامل L است و L شامل q نیست).

اثبات قضیه ۴: طبق روشی که در آغاز اثبات قضیه ۳ بیان شد، می توانیم وجود خط L را که شامل نقاط p و q است و خط L_1 را که موازی L و شامل دو نقطهٔ متمایز x و y (قضیهٔ ۲) است، بپذیریم. بنا به اصل ۳ خطوط k و k_1 که بترتیب توسط زوجهای (p و x) و (q و y) مشخص می شوند، وجود دارند. نقطهٔ q روی خط k نیست، زیرا اگر q روی k باشد، بنا به اصل ۳ k و L یك خط خواهند بود، (و این غیر ممکن است زیرا x روی L نیست). همچنین y روی k نیست، زیرا در اینصورت k و L_1 یك خط خواهند بود. بهمین ترتیب، p روی k_1 نیست و x هم روی k_1 نیست. حال خطوط M و M_1 که بترتیب توسط زوجهای (p و y) و (x و q) مشخص می شوند نیز وجود دارند و می توانیم نشان دهیم که q روی M نیست، x روی M نیست، p روی M_1 نیست و y روی M_1 نیست.
بنابراین هیچ دو خطی از خطوط L و L_1 و k و k_1 و M و M_1 «یکی» نیستند.

IV - بررسی قضایا و اثبات‌های فوق

اگر خواننده، اثبات‌های فوق را دنبال کرده باشد، بعید نیست که متوسل به استفاده از شکل شده باشد! البته این امری طبیعی است، زیرا همه از دوران دبیرستان به استفاده از شکل عادت کرده‌ایم؛ و در واقع به کمك شکل می توانیم نمادهای متعددی چون (L و p و q و...) و اهمیت نسبی آنها را در ذهن نگاهداریم. در هر حال، همانطور که قبلاً هم گفته شده است، در این جا هیچ معنی خاصی برای «نقطه» و «خط» در نظر نگرفته‌ایم، بنابراین باید بتوانیم و عملاً هم می توانیم به جای «نقاط»، «سکه‌ها» و به جای «خطوط» زوجهایی از «سکه‌ها» را گذاشته و هم‌چنان به صحت مطالب اثبات شده متکی باشیم. در واقع اگر با در نظر گرفتن هر مجموعه ای که چهار عنصر داشته باشد، به جای نقطه هر یك از آن عناصر و به جای خط هر زوج از آن عناصر را منظور داریم، می توانیم همین اثبات‌ها را با در نظر داشتن معانی جدید دنبال کنیم.

البته، قضایایی را که در بخش های قبل بیان کرده ایم بهیچوجه تمامی قضایایی نیستند که می توانستیم بیان کنیم. بعنوان مثال، می توان نشان داد که هر مجموعه ای از عناصر که اصول Γ در موردشان صادق باشد، اگر مانند هندسهٔ معمولی دارای بینهایت نقطه نباشد، تعداد نقاطش باید تابع شرایطی باشد (مثلاً چنین مجموعه ای نمی تواند شامل ۵ عنصر باشد)، همچنین میتوان وجود رابطه ای بین تعداد نقاط و تعداد خطوط چنین مجموعه‌ای را ثابت نمود. در واقع این جستجو را تا حد شگفت‌آوری می توان ادامه داد. حال آنکه در آغاز بحث چنین به نظر می رسید که با چنین دست مایهٔ محدودی نمی توان به اثبات قضایای بیشتری پرداخت. در اینجا به ارائه قضایای جدید نمی‌پردازیم زیرا همین تعدادی که تا بحال مطرح کرده ایم برای ادامهٔ این بحث کفایت می کند.

۲۱

برای آنکه در مورد استفاده از کلمات به اشکالی برنخوریم، هرجا کلمهٔ «حکم» را بهمراه سیستم اصول Σ بکار بردیم، منظورمان جمله‌ای است که در آن فقط اصطلاحات کلی و اصطلاحات تعریف نشدهٔ سیستم Σ بکار رفته باشد. چنین حکمی را می توانیم «حکم Σ» بنامیم. بنابراین، هر یك از اصول Γ خود یك «حکم Γ» به حساب می آیند. (اصطلاح «موازی» را که در اصل پنجم بکار رفته است، می‌توان به کمك اصطلاحات کلی و اصطلاحات تعریف نشدهٔ سیستم Γ بیان نمود.)

۲۲

برای هماهنگی با قرادادهای قسمت دوّم، وقتی می گوئیم Σ متضمن حکم s است، که بتوان حکم s را، مثل موارد بالا، با استنتاج منطقی از Σ بدست آورد. در حالت خاص، هر سیستم اصولی بالطبع متضمن هر یك از اصول خویش است. همچنین هرگاه Σ متضمن s باشد، می گوئیم s منطقاً قابل استنتاج از Σ می‌باشد.

۲۳

ضمن بحث فوق در دو مورد به مفهوم دقیق اصطلاحاتی که بطور معمول بکار

می بریم توجه کردیم و برای اجتناب از خلط مبحث قراردادهائی را پذیرفتیم. دو اصطلاح که به آنها توجه کردیم مفاهیم «مجموعه» و «متمایز» بود. این دو اصطلاح را بدون تعریف گذاشته، محض اطمینان آنها را جزو مفاهیم کلی و تکنیکی پذیرفتیم. با اینهمه نتوانستیم به برداشت عمومی و مشترکی از این کلمات قانع شویم و بناچار قراردادهایی در مورد مفهومی که از آنها استنباط می شود، قائل شدیم. به عبارت دیگر، کلمات «نقطه» و «خط» را یکسره تعریف نشده برجای گذاشتیم، با این تذکر که می توانیم برای آنها هر معنایی قائل شویم فقط با این شرط که این معنا با سیستم اصول، ناسازگار نباشند. دیدیم که تعابیری بصورت «مجموعه = کتابخانه» و «نقطه = کتاب» قابل پذیرفتن نبود، اما اگر c هر مجموعهٔ ۴ عنصری باشد، تعبیر «نقطه = عضوی از مجموعه c» و «خط = یك زوج از اعضای c» را می توان پذیرفت. کلماتی از قبیل «نقطه»، «خط» و «موازی» را اصطلاحات «تکنیکی» سیستم می نامیم و اصطلاحاتی چون «نقطه» و «خط» در این میان، «اصطلاحات تکنیکی تعریف نشده» (یا چنانچه غالباً بکار میرود: اصطلاحات اولیه) نامیده می شوند. کلماتی مانند «مجموعه» و «متمایز» را «اصطلاحات کلی» می خوانیم که در بخش ۵ـ۲ ذکر شده اند.

مثالهایی دیگر از اصطلاحات کلی در سیستم Γ عبارتند از «وجود دارد» (در اصل ۲)، «یك» (در اصل ۳)، «دو» (در قضیه ۱)، «چهار» (در قضیه ۳)، «شش» (در قضیه ۴)، «و» (در اصل ۳)، «یا» (در تعریف ۳ـ۲) «نه، علامت منفی» (در اصل ۴) و «هر» (در قضیه ۱). اگر می خواستیم یك سیستم اصول برای حساب مقدماتی اعداد پایه گذاری کنیم، (روابطی چون: ۴ = ۲+ ۲ و ۳= ۲+ ۱ و غیره)، لازم بود «یك» را به عنوان یك اصطلاح تعریف نشدهٔ تکنیکی می پذیرفتیم. بدین ترتیب این اصطلاح می توانست در سیستمهای اصولی متفاوت، معانی گوناگون به خود بگیرد؛ اصطلاح «وجود داشتن» را همانطور که در موارد قبل بکار رفت، می توانیم به هنگام لزوم در اثبات قضایا بکار بریم و این بسته به امکان ارائه نمونه ای برای وجود است. بدین ترتیب، در اثبات قضیه ۳، برطبق اصل ۵ توانستیم از وجود خطی مانند L صحبت کنیم و مثال «اجتماع سه نفری» را بعلت عدم امکان وجود خطی بموازات خط دیگر (که توسط اصل ۵ لازم میاید) کنار گذاشتیم. چنانکه بعداً خواهیم دید، لازم است که بین این گونه «وجود» و آنچه که عموماً «وجود ریاضی» خوانده می شود، تفاوت بگذاریم. کلماتی از قبیل «و» و «یا» و «نه» را نیز بعداً در مقولهٔ اصطلاحات منطقی مورد بحث قرار خواهیم داد. همچنین به کلمه «عنصر» که در تعریف ۳ـ۲ در کنار اصطلاح «مجموعه» بکار رفته است، در ادامهٔ مطلب توجه خواهد شد.

۷ ـ منشاءِ اصول

می خواهیم منشاءِ حکمهایی را که بعنوان اصل انتخاب و بیان می گردند، بدانیم. در سیستم Γ تعدادی اصل را پذیرفتیم، که اینکار با اتکا به آشنائی قبلی مان با هندسه، به آسانی صورت گرفت؛ در واقع، کار ما در اینجا انتخاب دقیق از موضوعاتی بود که قبلاً با آن سر و کار داشته ایم. از کلمات تکنیکی تعریف نشده «نقطه» و «خط» نیز قبلاً نوعی تعبیر در ذهن داشته ایم. همانطور که بعداً خواهیم دید، این روشی همیشگی برای استخراج اصول است. پس، اصول، حکمهایی در مورد مفاهیمی هستند که قبلاً با آنها نوعی آشنایی داشته ایم. لذا، اگر قبلاً با علم حساب آشنایی داشته باشیم می توانیم برای آن اصولی وضع کنیم. بدیهی است که این روش تنها محدود به حوزه ریاضیات نمی شود. مثلاً اگر با هر رشته ای از دانش چون فیزیك، فلسفه، شیمی، جانور شناسی یا اقتصاد آشنا باشیم، می توانیم برای آن، یا برای بخشی از آن، مجموعه ای از اصول انتخاب کنیم و ببینیم که چه قضایایی را با استنتاج منطقی می توان از آن بدست آورد. بنابراین «اصل»، برطبق تعریفی که امروزه بیان می شود عبارتست از «حکمی که ظاهراً در مورد یك مفهوم بنیادی صادق است» و «سیستم اصول»* مجموعه ای از چنین احکامی در مورد آن مفهوم بنیادی است.

پس عملاً اول مفهوم و پس از آن اصل بوجود می آید. واضح است که از لحاظ تئوری این تقدم و تأخر الزامی نیست. و مثلاً می توانیم اصطلاحات تعریف نشده ای چون ـ «اَجی» و «مَجی»! در نظر گرفته و اکسیومهایی به کمك این اصطلاحات و اصطلاحات کلی ارائه دهیم. اگر هیچ مفهومی در ذهن نداشته باشیم عملاً هیچ حکمی نمی توانیم بکنیم. پس تا وقتیکه معنایی برای «اجی» و «مجی» قائل نشده باشیم، یعنی مفهومی برای صحبت کردن درباره اش عرضه نکرده باشیم به سختی می توانیم چیزی برای گفتن بیابیم. و اگر سرانجام بدون اطلاق مفاهیمی به «اجی» و «مجی» حکمهایی در موردشان عرضه کنیم بسادگی امکان دارد که این حکمها با یکدیگر ناسازگار باشند. بطوریکه خواهیم دید «مفهوم بنیادی» فقط سرچشمهٔ پیدایش اصول نیست بلکه ما را در تحقیق سازگاری اصول نیز یاری می کند.

می توان مطلب را چنین عنوان نمود که برای ایجاد سیستم اصول، از میان یك

* در تمام متن می توان بجای سیستم اصول، «دستگاه اصول ـ Axiom System» و بجای سیستم اصولی، «دستگاه اصولی ـ Axiomatic System» گذارد.

مجموعهٔ کلی T از احکامی که در مورد یك مفهوم در دست است، مجموعهٔ A را بعنوان «پایه» یا «کلید» حتی‌المقدور آنچنان انتخاب می کنیم که بتواند متضمن همهٔ احکام مجموعه T باشد. ممکن است ما به تمامی احکام مجموعهٔ T دسترسی نداشته باشیم (غالباً حتی آگاهی هم نداریم)، اما بی‌شك بسیاری از آنها را که از اهمیتی برخوردارند می‌شناسیم. بهمین روال هنگام وضع اصول برای مفهومی چون هندسهٔ مسطحه؛ همه حکمهایی را که می تواند صحت داشته باشد نمی‌دانیم، اما بتعداد کافی در این زمینه آشنایی داریم که بتوانیم سیستم اصول مان را انتخاب کنیم.

نحوه کار را می توان با شیوه ایجاد رنگ‌ها مقایسه نمود. بفرض T مجموعه ای از رنگهاست و ما به منظور ساختن رنگهای جدید قواعد مخصوصی برای ترکیب رنگها داریم و می خواهیم مجموعه‌ای از رنگهای T را بنام A انتخاب کنیم که برای ایجاد همهٔ رنگهای موجود در T با توجه به قانون ترکیب رنگها، کفایت کند. در این مثال بجای حکم «رنگ» و به جای «متضمن بودن» قانون ترکیب رنگها را جایگزین کرده ایم.

روال کار مشابهی نیز در مورد انتخاب اصطلاحات وجود دارد. همانطور که در بخش ۳ـ۴ گفته شد، ما در بحث خود بین اصطلاحات تکنیکی و اصطلاحات کلی تفاوت می گذاریم. اگر T مجموعهٔ تمام اصطلاحات تکنیکی باشد و ما قواعد بخصوصی در مورد تعریف اصطلاحات داشته باشیم، هدف آنست که مجموعه ای از اصطلاحات بنام A که تعریف نشده باقی می‌مانند از میان مجموعهٔ T چنان انتخاب کنیم که همهٔ اصطلاحات T را بتوان بتوسط آن تعریف نمود. برای تعریف اصطلاحات غالباً باید از اصطلاحات کلی نیز استفاده کنیم. مثلاً در تعریفی که در بخش ۳ـ۲ ارائه شد اصطلاح کلی «مجموعه» بکار رفت. بعضی از تعاریف هم ممکن است متکی به احکامی باشند که قبلاً اثبات شده اند. و بخصوص بدون اتکا به قواعد استنتاج منطقی ممکن است اشتباهاً دو تعریف مختلف ارائه دهیم که هر دو به یك مفهوم دلالت داشته باشند. اما اگر به جای «تعریف کردن» روش «متضمن بودن» را جایگزین کنیم به وضعیتی شبیه ناشی شدن قضایا از اصول، خواهیم رسید. آنچه اینجا تغییر می کند موقعیت نسبی T و A و روش اشتقاق می باشد.

اگر علامت $\Longrightarrow$ را که معمولاً در ریاضیات بکار می رود به معنی «متضمن بودن» در نظر بگیریم، نمایشی بصورت: $A \Longrightarrow T$ هم نشانهٔ استنتاج قضایا و هم نشانهٔ استخراج تعاریف خواهد بود. تا اینجا برای هیچکدام از این دو مورد قوانینی را که بر فرایند $\Longrightarrow$ حکم فرماست صریحاً بیان

نکرده ایم؛ در مورد استنتاج قضایا بایست قوانین بنیادی منطق و قواعد اثبات قضایا را بیان کنیم و در مورد تعاریف نیز می بایست به معیارهای دقیقی در مورد نحوهٔ استخراج یك اصطلاح به کمك اصطلاحات پذیرفته شدهٔ قبلی دست یابیم.

خلاصه مطلب: مفهوم را برمی گزینیم؛ اصطلاحات تعریف نشده و احکامی را که بعنوان اصل پذیرفته می‌شوند، انتخاب می کنیم؛ سرانجام به اثبات قضایا می پردازیم که طبعاً در این مرحله اصطلاحات جدید نیز بمیان می آیند. آنچه گفته شد خلاصه و در عین حال توضیحی کلی از روشی است که بکار میرود. مشاهده می شود که این روش نظری تا چه حد با کاربرد کلاسیك آن تفاوت داشته است. در کاربرد کلاسیك اصول بعنوان حقایق مطلق ـ احکام مطلقاً حقیقی در مورد جهان مادی ـ و واجد خصوصیت ضروری شناخته می‌شدند. در گذشته اصل پنجم بعنوان مطلبی «مطمئناً صحیح» پذیرفته می‌شد و بعنوان یك خصوصیت قطعی جهانی که در آن زندگی می کنیم تلقی می گردید. پیش از قرن نوزدهم بیان اصلی بصورت زیر غیر قابل تصور بود: هرگاه L خطی باشد و p نقطه‌ای غیر واقع برآن، حداقل دو خط متمایز وجود دارد که از p گذشته و با L موازی باشد.» همچنین بهیچوجه نمی توانستند بپذیرند که در آن واحد دو سیستم اصولی Γ_1 و C_1 داشته باشیم که باً یکدیگر ناسازگار باشند، مثل وضعیتی که امروز بین هندسهٔ اقلیدسی و غیر اقلیدسی برقرار است. اما اگر در نظر بگیریم که اصل صرفاً از مفهوم ناشی می‌شود، و بنابراین، تناقض بین اصول واقع در سیستم‌های جداگانه نشانهٔ تفاوت اساسی در مفاهیمی است که این اصول از آنها ناشی شده‌اند دیگر اشکالی در کار نخواهد بود. مهم این است که اصول واقع در یك سیستم با یکدیگر تناقض نداشته باشند. این اشاره، به بحث در مورد سازگاری و دیگر خواص سیستم‌های اصولی منجر می گردد.

۵ـ۱

اشارات:

مثالی برای یك روش دیگر در مورد ایجاد سیستم‌های اصولی جدید آن است که در هندسهٔ اقلیدسی بجای اصل پنجم اصل دیگری که آنرا نفی کند گذاشته و هندسه‌ای غیر اقلیدسی بنا می‌کنند. بطور کلی می‌توان با در دست داشتن یك مجموعهٔ اصول یك یا چند اصل آنرا به شکل قابل قبولی تغییر داده سیستم اصولی جدیدی بدست آورد.