گروه ادبیات و علوم انسانی

آشتی با ریاضیات

۱۸

تیر ۱۳۶۰

آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری
مدیر داخلی: محمد حسین احمدی
زیر نظر هیئت تحریریه
از انتشارات جانبی گروه ادبیات و علوم انسانی
صفحه‌آرایی، تصحیح، چاپ و صحافی: مرکز تولید انتشارات گروه ادبیات و علوم انسانی
نشانی: تهران ـ خیابان کریم‌خان‌زند ـ اول آبان شمالی ـ گروه ادبیات و علوم انسانی

سال پنجم ـ شماره ۲ (۱۸)

فهرست مطالب

۵۰ ریال

محمد باقری

بررسی و شمارش عناصر نخستین در فضای n بعدی

مقدمه:

در این مقاله می خواهیم به کمك مشاهدات عینی، قواعدی بیابیم که ما را با مفهوم فضای بیشتر از سه بعدی، آشنا کند. در این راه سعی می کنیم که خصوصیاتی را که با تغییر بعد فضا ثابت می‌مانند به‌عنوان تکیه‌گاه‌هایی، یافته و از آن برای استقراء ریاضی در مورد فضاهای بیشتر از سه بعد استفاده کنیم. بعد از این مقدمات به‌خصوصیاتی از مکعب n بعدی توجه می شود و به‌شمارش تعداد رئوس، یال‌ها و.... در این مکعب پرداخته و مفاهیم جدیدی را که در فضاهای جدید وارد بحث می شوند بررسی می کنیم. در پایان به‌کمك مثالی که نشان دهنده کاربرد عملی این مباحث انتزاعی است موفق می شویم که در بحث اصلی خود دوباره قدمی به‌جلو بر داریم. از آنجایی که این خود جلوه ای از تأثیر متقابل ریاضیات خالص و ریاضیات کاربردی است، در نحوهٔ بیان مطالب و تقدم و تاخر طبیعی آنها تغییری داده نشده است تا خواننده مسیر منطقی این گسترش را دریابد و همگام با مقالهٔ حاضر در حین بررسی مطلب مورد نظر به‌نکاتی جنبی توجه کند که بر روال اصلی بحث به‌نوبه خود تأثیر می گذارند منظور از عبارت «عناصر نخستین» در عنوان مقاله مجموعه ای است که در هندسه سه بعدی به‌صورت: { مکعب، مربع، پاره خط، نقطه } با آن آشنا هستیم و این عناصر خود حالت محدود شده ای از عناصر«مجموعهٔ مفاهیم»نخستین‌هستند که در هندسهٔ ۳ بعدی به‌صورت { حجم، سطح، خط، نقطه } مطرح می شود. در متن این نوشته در همین زمینه، مفصل تر صحبت خواهد شد و این اشاره فقط محض

آشنایی مقدماتی با عنوان مقاله بود. فضای n بعدی اقلیدسی از نظر ریاضی با فرمول $(ds)^2=(dx_1)^2+(dx_2)^2+\cdots+(dx_n)^2$ تعریف می‌شودکه در آن ds فاصلهٔ دیفرانسیلی دو نقطه و x_1 تا x_n محورهای مختصات فضای n بعدی هستند. به ازای $n=2$ و $n=3$ به‌ترتیب فرمول فاصله دیفرانسیلی در صفحه (فضای دوبعدی) و در فضای سه بعدی بدست می‌آید.

*

نخستین تعریفی که در مدرسه از هندسه برایمان کردند تعریفی بود به این صورت: **«هندسه علمی است که از نقطه، خط، سطح و حجم گفتگو می‌کند».** این تعریفی است ساده و درخور فهم کودك و نه به‌دور از واقعیت. از واقعیت دور نیست اما به‌تمامی هم درست نیست زیرا حتی در تعریفی موجز می‌بایست جامع و مانع بودن حفظ شود. هندسه نه فقط از نقطه و خط و سطح و حجم بلکه از سیستم‌های حاصل از ترکیب اینها و نیز از روابط فیمابین نقطه و خط و سطح و حجم و از روابط بین این «مفاهیم نخستین» با سیستم‌های ترکیبی حاصل از آنها که (به اشکال هندسی موسومند) گفتگو می‌کند.

حال بر می‌گردیم به‌مجموعهٔ مفاهیم نخستین که دستمایهٔ گسترش هندسه است: {نقطه، خط، سطح، حجم} . اولاً: این سوال مطرح می‌شود که چه رابطه ای بین عناصر این مجموعه برقرار است یا به‌عبارت دیگر چه جنبهٔ مشترکی آنان را در یك مجموعه قرار می‌دهد. ثانیاً: اینکه چرا این مجموعه چهار عنصر دارد و آیا کمتر یا بیشتر از چهار هم ممکن است؟

پیش از هر چیز یافتن رشتهٔ پنهانی که این مهره‌های چهارگانه را به‌هم مرتبط نگاه می‌دارد مورد نظر است و بدین منظور چهار مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

I- {ریاضیات و سپیدی و هواپیما و ۲}

II- {خربزه و نارنگی و انار و سیب}

III- {۲۸۶ و ۸۰ و ۳۵ و ۲}

IV- {۲۷، ۹، ۳ و ۱}

در مجموعهٔ I تنها جنبهٔ مشترك بین عناصر «بودن» است. در مجموعهٔ II از این فراتر رفته به وجه مشترك «میوه بودن» می‌رسیم. در مجموعهٔ III علاوه بر «عدد بودن» خاصیت «ترتیب پذیری» نیز وجود دارد یعنی می‌توان عناصر مجموعه را که اعداد هستند برحسب بزرگی (یا کوچکی) مرتب نمود.

در مجموعهٔ IV علاوه بر همهٔ خواص مجموعهٔ III یك کیفیت قابل توجه دیگر وجود دارد و آن وجود قانونی است که براساس آن باداشتن هر عنصر می‌توانیم عناصری را که در صف «قانون ترتیب پذیر» بعد یا قبل (و حتی چند مرحله بعدتر یا قبل‌تر) از عنصر مورد نظر هستند مشخص کنیم. به‌طوری‌که اگر قرار باشد عنصر دیگری وارد این مجموعه شود و فقط با اعداد صحیح سر و کار داشته باشیم بی‌گمان این عنصر عدد ۸۱ خواهد بود (با توجه به قانون تصاعد هندسی که بین عناصر مجموعهٔ IV وجود دارد).

حال به این سؤال می‌پردازیم که مجموعهٔ «عناصر نخستین» از لحاظ «سازمان یافتگی» با کدامیك از چهار مجموعهٔ فوق همانند است؟

اگر به قانونی کلی دست یابیم که بین این عناصر حکمفرما باشد دیگر لزومی به مقایسه با مجموعه‌های I و II و III نیست و مجموعه «عناصر نخستین» از نظر «سازمان یافتگی» همانند مجموعه IV است که در میان چهار مجموعهٔ مورد مثال از بالاترین درجهٔ «سازمان یافتگی» برخوردار است.

برای رسیدن به چنین رابطه‌ای، توجه کنیم که پاره خط از حرکت مستقیم و محدود نقطه حاصل می‌شود و اگر این پاره خط را در جهت عمود بر آن و به‌اندازه طولش حرکت دهیم مربع به‌دست می‌آید. همچنین از حرکت دادن مربع به اندازه طول ضلعش و در امتداد عمود بر فضای دو بعدی مربوط به مربع، مکعب به‌دست می‌آید. بنابراین مشاهده می‌شود که **برای رسیدن از هر یك از عناصر نخستین به عنصر بعدی می‌بایست آن عنصر را در امتداد عمود بر فضای موجود حرکت دهیم.** این گفته در مورد مجموعهٔ «مفاهیم نخستین» یعنی {نقطه، خط، سطح، حجم} نیز در حالت کلی‌تری صادق است و طبعاً از جامعیت بیشتری نیز برخوردار است. با اینهمه ما در اینجا ساده‌ترین حالت مفاهیم نخستین را که دارای مولفه‌های متعامد و محدود و مساوی هستند یعنی پاره خط و مربع و مکعب را مورد بررسی قرار می‌دهیم زیرا در عین سادگی، از نظر بحث ما کیفیات اختصاصی آنها محدودیتی ایجاد نمی‌کند واز قابلیت تعمیم آنها نمی‌کاهد. بخصوص که در موقع شمارش عناصر نخستین (که مورد نظر همین مقاله است) به حالات پیچیده‌تری از همین اشکال ساده بر می‌خوریم.

حال به بررسی سؤال دوّم (ثانیاً) می‌پردازیم. جهان در هندسهٔ اقلیدسی که مطابق با دریافت‌های حسی روزمره و عادی ماست، سه بعدی است. یعنی حرکت در امتداد سه بعد امکان دارد. قانون کلی گذار (عبور) از هر «عنصر نخستین» به عنصر بعدی

را F می‌نامیم. چون در نتیجه هر بار به‌کار بردن F به شکل هندسی پیچیده‌تر می‌رسیم، بهتر است از نقطه شروع کنیم:

$$F(\text{نقطه}) = \text{پاره خط}$$

یا به‌زبان دیگر:

$$\text{نقطه} \xrightarrow{F} \text{پاره خط}$$

به‌همین ترتیب می‌توان به‌طور کلی نوشت:

$$\text{نقطه} \xrightarrow{F} \text{پاره خط} \xrightarrow{F} \text{مربع} \xrightarrow{F} \text{مکعب}$$

و می‌توان تابع f را که F حالت خاصی از آن باشد به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$\text{نقطه} \xrightarrow{F} \text{خط} \xrightarrow{F} \text{سطح} \xrightarrow{F} \text{حجم}$$

بدیهی است که در هر بار اِعمال F یك بعد اشغال شده است و مجموعهٔ عناصر نخستین که با نقطه شروع می‌شود علاوه بر نقطه شامل همهٔ حالاتی است که از اعمال F به تعداد دفعات ممکن ناشی می‌شود. پس غیر از نقطه فقط شامل سه عنصر دیگر می‌تواند باشد (زیرا در فضای سه بعدی اعمال می‌شود) که به‌ترتیب از یك و دو و سه بار اعمال F روی نقطه حاصل می‌شود. بدین ترتیب روشن می‌شود که چرا «مجموعهٔ عناصر نخستین» و «مجموعهٔ مفاهیم نخستین» دارای ۴ عنصر می‌باشد. از استدلال فوق چنین نتیجه می‌شود که در فضای n بعدی تعداد عناصر «مجموعه عناصر نخستین» و نیز تعداد عناصر مجموعهٔ«مفاهیم نخستین» برابر $n+1$است.

*

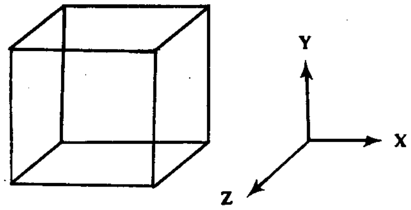
تجسم اشکال هندسی با بعد بیش از ۳ برای ما که موجودات ۳ بعدی هستیم آسان نیست. در این مقاله سعی خواهیم کرد که بعد از توضیحات با تکیه بر هندسهٔ سه بعدی که با آن آشنا هستیم چنگی در فضاهای فراتر که از برد درك حسی مان خارج است بیندازیم.

در علوم تجربی هم گذار از امواج مرئی به طیف گستردهٔ امواج الکترومغناطیسی (امواج رادیویی، مادون قرمز، ماوراءِ بنفش، اشعه x، اشعه گاما، اشعه کیهانی) از همین مقوله است و با روشی همانند آنچه مورد نظرماست سرانجام پس از تغییراتی، مثلاً امواج رادیویی را که از دیدن آن عاجزیم به طریقی روی صفحهٔ اسیلوسکوپ می بینیم. در همهٔ این موارد شرط اصلی آنست که عناصر مورد مطالعه طی تغییراتی که در آنان صورت می‌گیرد خصوصیاتی را که مورد نظرماست رها نکرده باشند. همچنین است گذار از هندسهٔ اقلیدسی به هندسه‌های نااقلیدسی و زایش مکانیك نسبی از بطن مکانیك کلاسیك.

*

در بررسی مسائل و قضایای هندسهٔ فضائی چون در عمل ناگزیر به استفاده از صفحهٔ کاغذ هستیم که بیش از دو بعد ندارد به اشکال جدیدی برمی‌خوریم که هنگام مطالعهٔ هندسهٔ مسطحه ابداً با آن مواجه نیستیم. این موضوع بخصوص در آغاز آشنایی با هندسهٔ فضائی برای دانش آموزان سردرگمی هایی بوجود می‌آورد.

عملاً برای آنکه بتوان مسائل اشکال هندسی سه بعدی را روی کاغذ پیاده کرد براساس روش تصویری «پرسپکتیو» دوبعد را با ابعاد دوگانهٔ کاغذ تأمین می‌کنند و بعد سوم را که در واقع می‌بایست عمود بر صفحهٔ کاغذ باشد با امتداد مایل روی صفحهٔ ترسیم نشان می‌دهند. همهٔ ما با نمایش مکعب به‌صورتی که در شکل (۱) نشان داده شده است آشنا هستیم و در حل مسائل هرجا که لازم باشد خطی به‌موازات بعد سوم رسم شود روی صفحهٔ ترسیم آن را به موازات محور مایل z می کشیم. با نگاه کردن به تصویر فوق از مکعب می‌توانیم حالت اصلی آن را که سه بعدی است تجسم کنیم.



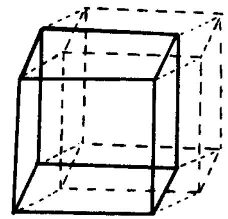
شکل ۱

با استفاده از شکل (۱) موجودات دو بعدی (موجوداتی فرضی که همچون سایه فاقد حجم باشند) در صورت داشتن ذهن ریاضی پرورش یافته می‌توانند مسائل مربوط به مکعب را در جهان صفحه‌ای خودشان حل کنند. پس ما هم که موجودات ۳ بعدی هستیم باید بتوانیم با استفاده از چنین تبدیلی مسائل مربوط به مکعب چهار بعدی (که بعداً در موردش بیشتر صحبت خواهد شد) را در جهان سه بعدی خودمان حل کنیم. همانطور که انسان‌های چهار بعدی آن مسائل را روی کاغذهای سه بعدی دفتر هندسه‌شان حل می‌کنند! برای این کار اول یك مکعب می‌سازیم که اضلاعش از مفتول باشد سپس مکعب دیگری همانند مکعب اولیه ساخته و آنرا نسبت به مکعب اولیه در موقعیتی قرار می‌دهیم که اولاً همهٔ اضلاع نظیرش با مکعب اولیه موازی باشد ثانیاً مرکز این مکعب نسبت به مرکز مکعب اوّلیه (یا هر راس این مکعب نسبت به راس نظیرش در مکعب اولیه) تغییر مکانی محدود و در امتدادی مایل نسبت به سه بعد اصلی داشته باشد. حال اگر با مفتول‌های مستقیم دیگری رئوس نظیر این دو مکعب را به‌هم وصل کنیم، تصویری از مکعب ۴ بعدی در فضای ۳ بعدی به‌دست آورده ایم

می‌توانیم مسائل مربوط به مکعب ۴ بعدی را در فضای ۳ بعدی حل کنیم.

تصویر دوبعدی هم می‌توان از مکعب ۴ بعدی رسم کرد که در اینجا ناچار به‌گنجاندن دو بعد اضافی در صفحه هستیم که به‌صورت دو امتداد مایل متفاوت ظاهر می‌شود.

این کار را می‌توان روی صفحه برای مکعب‌های ابعادبالاتر هم ادامه داد ولی شکل حاصل بسیار پیچیده و شلوغ خواهد شد



شکل ۲

مکعب اول —
مکعب دوم - - -
خطوط رابط ....

*

ممکن است این سؤال پیش اید که بررسی اشکالی که قابل تجسم نیستند و بالطبع در مسائل عملی با آنها سروکار پیدا نمی‌کنیم، چه سودی خواهد داشت؟

باید توجه داشت که گسترش ریاضیات الزاماً تابع نیازهای روزمره نیست بلکه این پهن دشت عرصهٔ تأثیر متقابل دریافت‌های عینی و استنتاهای ذهنی است هم بدینگونه مثلاً جبر «بول» که نخست یکسره انتزاعی می نمود و خود بی‌شك در تحلیل نهایی حاصل ساخت و پرداخت دریافت‌های عینی بود بعدها نقش خود را در بررسی مدارهای لاجیك که امروزه در جنبه‌های گوناگون صنعتی بخصوص در کامپیوترهای الکترونیکی کاربرد اساسی دارد ایفا کرد. البته ما ضمن بحث در زمینهٔ اصلی به مثال‌هایی از کاربرد نتایج حاصل و یا به عبارت دیگر تعبیر آن نتایج در مسائل عینی و ملموس اشاره خواهیم داشت.

*

یکی از خصوصیات عمده‌ای که در تصویر ۲ بعدی از مکعب محفوظ می‌ماند عدهٔ رئوس و اضلاع و وجوه است. این خاصیت در تصویر ۲ بعدی از مکعب ۴ بعدی (شکل ۲) نیز محفوظ مانده است.

از «مفاهیم نخستین» در پاره خط، نقطه و خط (دو رأس و یك ضلع) وجود دارد. در مربع نقطه (رأس) و خط (ضلع) و سطح (وجه) وجود دارد. در مکعب نقطه (رأس) و خط (یال) و سطح (وجه) و حجم وجود دارد. حال که قرار است با مکعب‌ها با بعد بیش از ۳ سر و کار داشته باشیم برای سهولت بیان نقطه را مکعب رستهٔ صفر، پاره خط را مکعب رستهٔ یك، مربع را مکعب رستهٔ ۲ می نامیم و مکعب‌های با بعد بیش از ۳ را نیز با

رسته‌شان نامگذاری می‌کنیم.

در نقطه به‌جز یك رأس چیز دیگری وجود ندارد. در مکعب یك رسته بالاتر (پاره خط) مفهوم طول و در مکعب رستهٔ بعد (مربع) مفهوم سطح و سر انجام در مکعب رستهٔ ۳ (که همان مکعب معمولی باشد) مفهوم حجم وارد می‌شود. هر بار که به‌رستهٔ بالاتری می‌رویم «مفهوم» جدیدی نیز وارد می‌شود و مکعب از هر رسته شامل تعدادی از مکعب‌های رسته‌های پایین‌تر از خود می‌باشد. مثلاً مکعب ۳ بعدی چندین یال (مکعب رستهٔ ۱) و چندین وجه (مکعب رستهٔ ۲) دارد. به‌همین ترتیب مربع (مکعب رستهٔ ۲ چندین ضلع (مکعب رستهٔ ۱) و چندین رأس (مکعب رستهٔ صفر) دارد. وقتی وارد فضاهای بالاتر از ۳ بعدی شویم دیگر مفاهیم نقطه و خط و سطح و حجم کفایت نمی‌کنند و مفاهیم جدیدی به‌ترتیب وارد می‌شوند که بعنوان مثال نسبت نخستین شان به «حجم» مثل نسبت مفهوم «حجم» است به «سطح» و برای محاسبهٔ این «فراحجم» در مورد مکعب ۴ بعدی می‌بایست طول ضلع آن را چهار بار در خودش ضرب کنیم.

بدین ترتیب می‌توانیم نقطه و خط و سطح و حجم را چهار پله متوالی از پلکانی بدانیم که بقیهٔ پله‌های آن در تاریکی فرو رفته‌اند و حالا که به‌یافتن قانون‌گذار از هر پله به‌پلهٔ بعد نایل شده‌ایم می‌توانیم مثلاً در مورد ۷ پله بعد که مفاهیمی دور از ذهن ما هستند اطلاعاتی به‌چنگ آوریم.

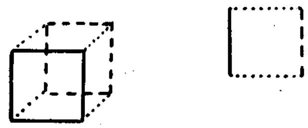
*

با دقت و تعمق در تصویر دو بعدی از مکعب ۴ بعدی (شکل ۲) می‌توانیم دریابیم که مکعب ۴ بعدی ۳۲ یال و ۸ مکعب ۳ بعدی دارد. دیگر هنگام آن رسیده است که به‌سؤال‌هایی از این دست پاسخ دهیم که مکعب ۵ بعدی چند رأس، چند ضلع، چند وجه و چند مکعب رستهٔ ۴ دارد؟ همچنین عناصری را که به‌مفهوم‌های رستهٔ بالاتر مربوط می‌شود در مکعب‌های n بعدی بشماریم.

هنگام گذار از نقطه به‌پاره خط، از پاره خط به‌مربع و اصولاً از هر مکعب به‌مکعب رستهٔ بالاتر، تعداد رئوس دو برابر می‌شود. زیرا با انتقال مکعب اولیه تعداد رئوس کلاً دو برابر می‌شود و طی اتصال رئوس نظیر، تغییری در تعداد رئوس حاصل نمی‌گردد بنابراین با شروع از نقطه (مکعب رستهٔ صفر) که یك رأس دارد، تعداد رئوس هر مکعب دو برابر تعداد رئوس مکعب رستهٔ پایین‌تر است.

حال ببینیم در گذار از مربع به‌مکعب تعداد اضلاع چگونه زیاد می‌شود. اولاً وقتی مربع دیگری از انتقال مربع اولیه ایجاد می‌شود تعداد ضلع‌ها دو برابر می‌گردد در

مرحله بعد، هنگام اتصال رأس‌های نظیر، به‌تعداد رأس‌های مربع، ضلع‌های جدید حاصل می‌شود. به‌همین ترتیب در گذار از پاره خط به‌مربع تعداد ضلع‌ها در مرحلهٔ اوّل دو برابر شده و بعد هنگام اتصال رأس‌های نظیر، به‌تعداد رأس‌های پاره خط اولیه، ضلع جدید اضافه می‌شود (شکل ۳). در نتیجه مربع دارای چهار



خط های رابط ...
شکل اولیه —
شکل جدید - - -

شکل ۳

(تعدادرأس‌های‌پاره‌خط + تعداد ضلع‌های پاره‌خط) ×۲ =۲×۱+۲=۴

ضلع خواهد بود مطالب فوق را در جملهٔ زیر خلاصه می‌کنیم:

« تعداد هر یك از عنصرهای نخستین در هر مکعب رستهٔ nدو برابر تعداد همان عنصر در مکعب رستهٔ ۱ـ n است به‌علاوهٔ تعداد عنصر رستهٔ پایین‌تر در مکعب رستهٔ ۱ـ n »

در هر مکعب nبعدی ۱+nگونه عنصر نخستین (از رستهٔ صفر تا رستهٔ n) وجود دارد.

طبق نتیجه خلاصهٔ فوق، تعداد وجوه مکعب ۳ بعدی برابر است با دو برابر تعداد وجوه مربع بعلاوهٔ تعداد ضلع‌های مربع. با داشتن رابطهٔ مذکور فوق می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم:

مفهوم	d رسته(بعد)	نام	e=۰ عده رأس‌ها	e=۲ عده ضلع‌ها	e=۲ عده وجوه	e=۳ عده مکعب‌ها	e=۴	e=۵ ...
نقطه	۰	نقطه	۱	۰	۰	۰	۰	۰
خط	۱	پاره‌خط	۲	۱	۰	۰	۰	۰
سطح	۲	مربع	۴	۴	۱	۰	۰	۰
حجم	۳	مکعب	۸	۱۲	۶	۱	۰	۰
.....	۴	.....	۱۶	۳۲	۲۴	۸	۱	۰
.....	۵	.....	۳۲	۸۰	۸۰	۴۰	۱۰	۱
.....	۶	.....	۶۴	۱۹۲	۲۴۰	۱۶۰	۶۰	۱۲

(جدول عناصر نخستین)

این جدول را می‌توان تا حد مورد نظر ادامه داد. از خط چین به بالا به فضای سه عدی اقلیدسی مربوط می‌شود.

در این جدول (جدول عناصر نخستین) هر عدد از مجموع دو برابر عدد بالایی با عدد سمت چپ عدد بالایی به‌دست می‌آید. اولین عدد که به‌سطر اول و ستون اول مربوط می‌شود «یك» است که همان تعداد رأس‌های «نقطه» می‌باشد.

ستون اول توان‌های متوالی ۲ است. نتیجه خلاصه را می‌توان به‌صورت $n_e^d = 2n_e^{d-1} + n_{e-1}^{d-1}$ نوشت که در آن d رستهٔ مکعب، e رشتهٔ عنصر نخستین و n تعداد عنصر نخستین مورد شمارش است.

((کاربرد «جدول عناصر نخستین» در روش‌های شمارش CountingTechnics))

می‌دانیم که در حساب احتمالات، احتمال وقوع یك حادثه از تقسیم عدّه حالت‌های اولیّه متضمن حادثهٔ مورد نظر برعده کل حالت‌های اولیه به‌دست می‌آید به‌شرطی که همهٔ حالت‌های اولیه دارای احتمال وقوع مساوی باشند. به‌مسائل زیر و حل آن به‌کمك جدول عناصر نخستین توجه کنید:

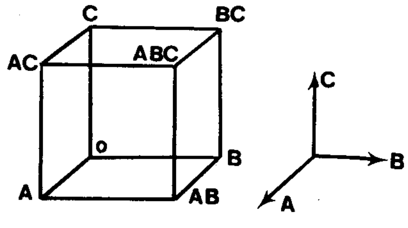
۱) ـ در قفسی باز است و یك موش، یك خرگوش و یك گربه هر کدام می‌توانند از خارج به‌داخل قفس بروند یا از آن خارج شوند. یك چشم الکترونیکی می‌تواند ورود یا خروج یك موجود را با دو علامت مختلف (برای ورود یا خروج) اعداد کند. این وضعیت را که تنها موش داخل باشد و بعد گربه داخل شود و نیز این وضعیت را که تنها گربه داخل باشد و بعد موش وارد شود وضعیت نامطلوب می‌نامیم (در خارج از قفس گربه نمی‌تواند موش را بگیرد). در یك لحظه چشم الکترونیکی ورود یك موجود را اعلام می‌کند. چقدر احتمال دارد که وضعیت نامطلوب پیش آمده باشد؟

پاسخ مسأله ۱) ـ وجود هر یك از موجودات: موش، خرگوش و گربه را در قفس به‌ترتیب با حروف A و B و C نشان می‌دهیم. کل حالاتی که در قفس می‌تواند پیش آید به‌صورت زیر است:

۰ A B C AB BC AC ABC

تصادفی نیست که تعداد حالت‌ها برابر عدّهٔ رأس‌های یك مکعب است (رستهٔ مکعب با تعداد موجودات برابر است) زیرا موقعیت هر راس را بطور منحصر بفردی می‌توان

برحسب وجود یا عدم هر یك از ابعاد A و B و C بیان نمود و در عین حال مشاهده می‌شود که همهٔ حالت‌ها ترکیب A و B و C منظور شده است. ضلع C-AC نشان دهندهٔ حالتی است که فقط C در قفس است و A وارد یا خارج می‌شود. در مسئله‌ای که مطرح شد فرض براین است که چشم الکترونیکی ضمن اعلام عبور یك موجود، معین می‌کند که این موجود «وارد» شده است یا «خارج».



شکل ۴

عدهٔ حالاتی که طی آن یك موجود وارد قفس می‌شود برابر عدّه ضلع‌های مکعب است: ۱۲

حالاتی که نامطلوب خوانده می‌شود روی مکعب به‌صورت ضلع‌های A−AC و C−AC ظاهر شده است. پس احتمال مورد سؤال را می‌توان محاسبه کرد:

$$P=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

*

مسئله ۲) ـ پنج نفر که آنها را به نامهای A و B و C و D و E می‌نامیم در خانه‌ای زندگی می‌کنند. در یك لحظه در باز می‌شود و کس یا کسانی از ساکنان خانه وارد می‌شوند. چقدر احتمال دارد که واقعه به این صورت باشد که A و B و C و D باتفاق وارد شده اند؟

حل مسأله ۲) ـ ابتدا باید کل حالاتی را که طی آن کس یا کسانی وارد می‌شوند در نظر بگیریم. ورود می‌تواند بصورت ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ نفری باشد. عده حالاتی که طی آن ۱ نفر وارد می‌شود (طبق استدلالی که در مسئله ۱ عرضه شد) برابر تعداد ضلع‌های مکعب ۵ بعدی است. به‌همین ترتیب عده حالاتی که طی آن ۲ یا ۳ یا ۴ نفر وارد می‌شوند به‌ترتیب برابر تعداد وجوه، مکعب‌ها و مکعب‌های ۴ بعدی یك مکعب ۵ بعدی است. عدّه حالت‌هایی که طی آن ۵ نفر وارد می‌شوند یك است. پس به‌کمك جدول (ماتریس) عناصر نخستین، کل حالت‌های ممکن بدین ترتیب محاسبه می‌شود:

$e=۱ \quad e=۲ \quad e=۳ \quad e=۴ \quad e=۵$

$d=۵ \quad N=۸۰+۸۰+۴۰+۱۰+۱=۲۱۱$

ورود همزمان A و B و C و D به‌دو صورت ممکن است باشد بسته به اینکه هنگام

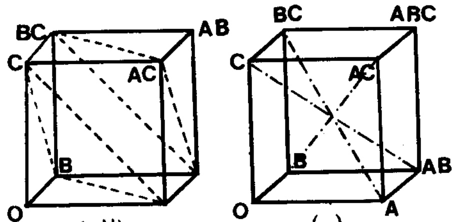
ورود آنها E در خانه باشد یا نباشد. پس می‌توان احتمال مورد سؤال را محاسبه نمود:

$$P=\frac{۲}{۲۱۱}$$

در اینجا باید توجه داشت که وقتی مثلاً ۳ نفر وارد خانه می‌شوند نه تنها انواع ترکیب‌های ممکنه آنها بلکه تعداد و انواع ترکیب‌های کسانی که در آن لحظه در خانه‌اند مورد نظر قرار گرفته است.

*

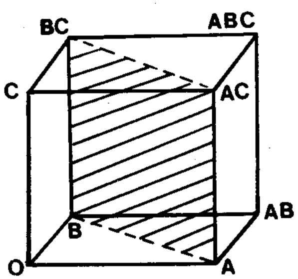
اگر در مسئله «یك» می‌خواستیم حالت‌هایی را هم به‌حساب بیاوریم که به‌طور همزمان یك موجود وارد قفس شده و موجودی از قفس خارج شود می‌بایست تغییرهایی به‌صورت AB↔AC را نیز منظور بداریم. این تغییرها در مکعب (برای حالت ۳ عنصری) بصورت قطرهای A−C و B−C و A−B و AB−AC و AC−BC و AB−BC ظاهر می‌شوند (شکل ۵ الف). اگر حالت‌های ۲ ورود همزمان بایـك خروج (یا۲ خروج همزمان بایك ورود) نیز منظور شوند قطرهای A−BC و B−AC و C−AB نیز باید شمرده شوند (۵ ب) پس می‌توانیم صورت مسأله یك را کامل‌تر کنیم (لازم نباشد که در هر تغییر فقط یك ورود یا یك خروج رخ دهد) و از عدّه قطرها کمك بگیریم. بعبارت دیگر شمردن تعداد قطرهای مکعب می‌تواند الگوی ریاضی همانند یك پدیده عینی باشد. در ادامهٔ این روش می‌توانیم به‌امکان‌های تازه‌ای دست بیابیم:



(الف) (ب)

شکل ۵

مثلاً متوجه قطرهای وجهی (شکل ۶) و قطرهای حجمی (در بعدهای بالاتر از ۳) می‌شویم و در صورتی که تعبیری که مور نظرتان باشد برای آنها بیابیم می‌توانیم در جستجوی روشی برای شمارش آنها (قاعدتاً به‌کمك جدول عناصر نخستین) باشیم. بی‌شك تعمیم این تکنیك برای ابعاد بالاتر که ترسیم و تصورش برایمان



شکل ۶

نامقدور است، ابزار جدیدی برای بررسی اینگونه مسائل بدست می‌دهد.

*

اگر مسئله ۲ را بخواهیم از روش معمولی شمارش حل کنیم به‌صورت زیر خواهد بود:

مجموع عده حالت‌هایی که یك یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ نفر وارد می‌شوند = عده کل حالت‌هایی که کس یا کسانی وارد می‌شوند.

عده حالت‌هایی که می‌توان ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ نفر را از بین ۴ نفرانتخاب کرد × عده حالت‌هایی که می‌توان ۱ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عده حالت‌هایی که ۱ نفروارد می‌شود

عدهٔ حالت‌هایی که می‌توان ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ نفر را از بین ۳ نفر انتخاب کرد × عدهٔ حالت‌هایی که می‌توان ۲ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدهٔ کل حالت‌هایی که ۲ نفر وارد می‌شود.

عدهٔ حالت‌هایی که می‌توان ۰ یا ۱ یا ۲ نفر را از بین ۲ نفر انتخاب کرد × عدهٔ حالت‌هایی که می‌توان ۳ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدهٔ کل حالت‌هایی که ۳ نفر وارد می‌شود.

عدهٔ حالت‌هایی که می‌توان ۰ یا ۱ نفر را از بین ۱ نفر انتخاب کرد × عدهٔ حالت‌هایی که می‌توان ۴ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدهٔ کل حالت‌هایی که ۴ نفر وارد می‌شود.

عدهٔ حالت‌هایی که می‌توان ۰ نفر را از بین ۰ نفر انتخاب کرد × عدهٔ حالت‌هایی که می‌توان ۵ نفر را از بین ۵ نفر انتخاب کرد = عدهٔ کل حالت‌هایی که ۵ نفر وارد می‌شوند.

در هر یك از حاصل‌ضرب‌های فوق به‌تعبیر ریاضی عده ترکیب‌های m تائی از مجموعه ۵ عنصری را در عدّه زیر مجموعه‌های مجموعه $5-m$ عنصری ضرب کرده‌ایم. برای هر دوی این‌ها در حساب احتمالات فرمول مشخصی وجود دارد. عده حالت‌هایی که می‌توان ترکیب‌های m تایی از مجموعه ۵ عنصری مشخص نمود به C_m^5 نشان داده می‌شود و برابر $\frac{5!}{m!(5-m)!}$ است.

عدّه زیر مجموعه‌های مجموعه m عنصری نیز برابر 2^m است. پس:

$$N=\frac{5!}{1!4!}\times 2^4+\frac{5!}{2!3!}\times 2^3+\frac{5!}{3!2!}\times 2^2+\frac{5!}{4!1!}\times 2+\frac{5!}{5!0!}\times 1=80+80+40+10+1=211$$

از طرفی همچنانکه قبلاً گفته شد، مثلاً عُدّه حالت‌هایی که طی آن ۲ نفر از ۵ نفر وارد می‌شوند برابر عدّه وجوه مکعب ۵ بعدی است. از مقایسهٔ این دو راه حل مختلفی که برای مسأله ۲ ارائه شد می‌توان فرمول زیر را برای محاسبهٔ تعداد عناصر رستهٔ e از مکعب d بعدی بدست آورد و در واقع یکایك عددهای جدول «عناصر نخستین» را می‌توان از روی آن مستقیماً محاسبه نمود:

$$\boxed{N_e^d=\frac{d!}{e!(d-e)!}\times 2^{d-e}}$$

در محاسبه‌های تقریبی برای مقدارهای زیاد n می‌توان $n!$ را از فرمول استرلینگ Stirling محاسبه نمود.

$$\text{stirling};\ n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n(1+u)}\qquad n\to\infty\ \ u\to 0$$