گروه ادبیات و علوم انسانی

آشتی با ریاضیات

۲۰

آذر ۱۳۶۰

آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری
زیر نظر هیئت تحریریه

از انتشارات جانبی گروه ادبیات و علوم انسانی
صفحه‌آرایی، تصحیح، چاپ و صحافی: مرکز تولید انتشارات گروه ادبیات و علوم انسانی.
نشانی: تهران ـ خیابان کریم‌خان‌زند ـ اول آبان شمالی ـ گروه ادبیات و علوم انسانی

سال پنجم ـ شماره ۴ (۲۰)

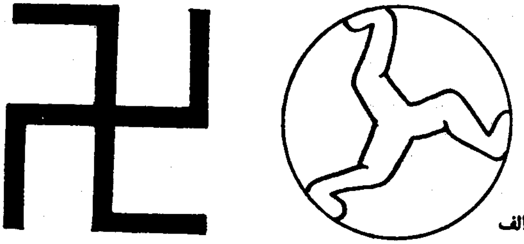
فهرست مطالب

نوشته: Ian Stewart
ترجمهٔ:محمّد باقری

کاربرد مفهوم گروه‌ها در بررسی تقارن

بسیاری از انواع تقارن در طبیعت وجود دارد و از دیر باز شناخته شده است. بدن انسان نسبت به یك محور قائم (یا درست تر بگوئیم، نسبت به یك صفحهٔ قائم) متقارن است و به‌همین علت، در تصویر انسان در آینه، به نظر می‌رسد که جای راست و چپ با هم عوض شده است. این نوع تقارن، تقارن دو وجهی (bilateral) نام دارد.

در دو تصویر شکل (۱) نمونه‌هایی از تقارن چرخشی (rotational) دیده می‌شود.



شکل ۱

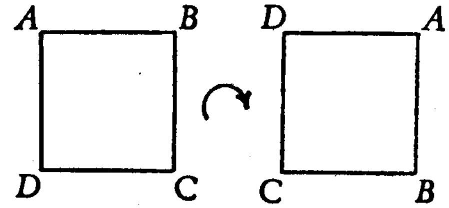
الف ب

یك شکل ممکن است نسبت به محورهای متعدد متقارن باشد یا آنکه ترکیبی از تقارن دو وجهی و تقارن چرخشی را دارا باشد. هر مربع نسبت به قطرهایش و نسبت به خطوطی که از مرکز مربع به موازات یك ضلع رسم شوند، دارای تقارن دو وجهی است. علاوه بر این، در نتیجهٔ چرخش به میزان ۹۰°، مربع بلاتغییر می‌ماند.

نوع کاملاً متفاوتی از تقارن در نقش‌های تزیینی (مثلاً در کاغذ دیواری) دیده می‌شود که در آن می‌توان کل نقش را در جهات مختلف انتقال داد بدون آنکه تغییری مشاهده شود.

تحقیق وجود تقارن در اشیاء،از نظر ریاضی اهمیت فراوانی دارد. در هندسه با استفاده از تقارن حل بسیاری از مسائل، ساده تر می‌شود. در مبانی ریاضی برخی از قوانین فیزیك، مانند قانون بقای انرژی، تقارن‌های خاص (مفروض) جهان، مبدأ اصلی است. خاصیتی بنیادی همچون تقارن را باید بتوان به کمك ریاضیات تحلیل نمود و در واقع هم این کار مقدور است. **نخستین قدم این است که تعریف مشخصی از تقارن در دست داشته باشیم تا مطمئن شویم که تصور مشترکی از این مفهوم داریم.** در غیر این صورت ممکن است این مفهوم با مفاهیمی چون «زیبایی» یا «پیچیدگی» در آمیخته شود. **ماهیت تقارن عبارت است از نوع حرکتی که شکل**

ظاهری را ثابت نگاه دارد. البته الزامی ندارد که تک‌تک نقاط در جای قبلی خود باقی بمانند. اگر مربع ABCD را به اندازهٔ زاویهٔ قائمه، حول مرکزش بچرخانیم (شکل ۲) رأس A به نقطهٔ B می‌رود، رأس B به C، رأس C به D و رأس D به A.



شکل ۲

در این مورد آنچه دارای اهمیت است، نه موقعیت نقاط بلکه نحوهٔ جابه‌جایی آنهاست. عباراتی از قبیل «چرخش به اندازهٔ زاویهٔ قائمه» یا «انعکاس reflection حول یك خط قائم» بیان کنندهٔ انواع تقارن مربع می‌باشد. با استفاده از مبحث توابع، عبارات فوق را می‌توان تابع‌های خاصی دانست که هم قلمرو و هم برد آنها صفحهٔ R^2 است. پس برای هر زیر مجموعهٔ S از R^2، هر تقارن S را می‌توان به صورت یك رابطهٔ متقابل $F:R^2 \to R^2$ تعریف نمود به طوری که برای همهٔ نقاط $x \in S$ تصویر x به توسط f یعنی f(x)، نیز در S باشد. این شرط اخیر را می‌توان به صورت رابطهٔ $f(s) = S$ نشان داد. به زبان هندسه، هر تقارن S عبارت است از حرکت صلبی از صفحه که S را در جای خود نگاه دارد هر چند که نقاط S تغییر مکان دهند.

البته هیچ الزامی ندارد که بحث خود را به صفحه محدود کنیم، فضای سه بعدی نیز برای این بحث مناسب است.

نوع تقارن موجود در شکل یك (الف) مشهود است: با چرخش °۱۲۰ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (یا خلاف آن)، شکل تغییری نمی‌کند. تابع مربوط به این نوع تقارن (یا حرکت صلب مربوط به آن) را w می‌نامیم. تقارن دیگری را هم که به چرخش °۲۴۰ مربوط می‌شود ν نام‌گذاری می‌کنیم. ممکن است به نظر برسد که فقط این دو نوع تقارن در شکل وجود دارد ولی طبق معمول ممکن است برخی جزئیات از نظر دورمانده باشد. سومین نوع تقارن شکل مذکور، تابع اینهمانی (identity) است. این تابع همهٔ نقاط را ثابت نگاه می‌دارد و بنابراین مشمول تعریف تقارن می‌شود و باید آن را هم در نظر گرفت. این تقارن را ـ در هماهنگی با کاربرد حروف در سایر مباحث ریاضی ـ به I نشان می‌دهیم. مجموعهٔ تقارن‌های شکل ۱ (الف) عبارت است از: I,W,ν.

چرخش °۲۴۰ معادل است با دوبار چرخش °۱۲۰. به عبارت دیگر، $ww=\nu$ که

در آن از تعریف ضرب توابع در یکدیگر استفاده شده است. برای سهولت می‌توان ww را به w^2 و www را به w^3 الی آخر، نشان داد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $w^2=\nu$. به طریق مشابه نتیجه می‌شود که $w=\nu^2$. در واقع اگر شکلی را دوبار، هربار به اندازهٔ °۲۴۰ درجه بچرخانیم، مثل آن است که فقط یك بار آن را °۱۲۰ چرخانده باشیم زیرا چرخش به اندازهٔ °۳۶۰ یك دور کامل است و مثل آن است که هیچ چرخشی روی نداده باشد. در واقع اگر هر زوج از این تقارن‌ها را در یکدیگر ضرب کنیم، تقارن سوم حاصل می‌شود. برای نشان دادن این موضوع جدول مقابل را تشکیل می‌دهیم:

X	I	w	ν
I	I	w	ν
w	w	ν	I
ν	ν	I	w

که در آن عنصر مربوط به سطر a و ستون b، برابرست با ab.

با استفاده از این جدول مشاهده می‌شود که $w^3=I$. این نتیجه کاملاً ملموس است زیرا سه بار چرخش °۱۲۰ همهٔ نقاط را به محل اولیه‌شان بر می‌گرداند.

این حقیقت که حاصل ضرب هر دو تقارن، نیز خود یك تقارن است، معمولاً بدین صورت بیان می‌شود که:

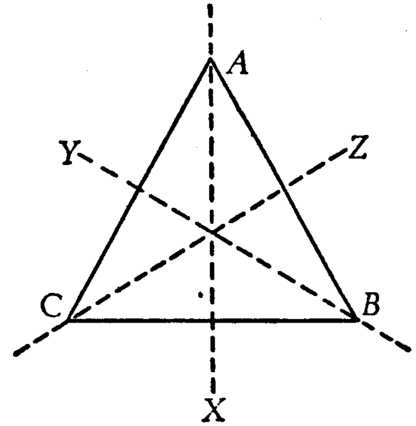
مجموعهٔ تقارن‌های هر شکل، تحت عمل ضرب «بسته» است. اگر I را به‌عنوان یك تقارن در نظر نمی‌گرفتیم، این خاصیت برقرار نبود و این حالت مثل آن بود که نوعی حساب داشته باشیم که نتوانیم با جمع بعضی از اعداد آن، عدد سومی بدست آوریم. در نظر نگرفتن I عملاً ممکن بود ولی با در نظر گرفتن آن، کار بسیار ساده‌تر می‌شود.

این مجموعهٔ تقارن‌ها که دارای عمل ضرب مخصوص به‌خود است، نمونه‌ای از آن‌گونه ساخت ریاضی است که تحت عنوان «گروه» (Group) بررسی می‌شود. البته در این جا به بحث در مورد مفهوم گروه نمی‌پردازیم و فقط این اسم را به‌کار می‌بریم. در بحث فوق «گروه تقارن» شکل ۱ (الف) را مشخص کرده‌ایم.

هر شکلی دارای یك گروه تقارن است. بدن انسان دارای دو تقارن است: اینهمانی و انعکاس r نسبت به‌یك صفحهٔ قائم. جدول ضرب به‌صورت مقابل در می‌آید:

X	I	r
I	I	r
r	r	I

دراین جا هم مجموعهٔ تقارن‌ها تحت عمل ضرب بسته است. مثال پیچیده‌تری می‌آوریم. مثلث متساوی‌الاضلاع (شکل ۳) دارای شش عمل تقارن است.



شکل ۳

تابع اینهمانی و چرخش‌های $120°$ و $240°$ در این جا نیز وجود دارد. علاوه براین‌ها در شکل مذکور انعکاس‌های نسبت به‌محورهای X و Y و Z وجود دارند که به‌ترتیب x و y و z نامیده می‌شوند. (این محورها هنگام حرکت مثلث، ثابت فرض می‌شوند و با مثلث حرکت نمی‌کنند.) توجه کنید که در شکل یك (الف) این انعکاس‌ها وجود نداشت زیرا در آن شکل انعکاس جهت پاها را وارونه می‌کرد.

مجموعهٔ تقارن‌ها $K=\{I,w,\nu,x,y,z\}$ (به‌عنوان توابع) تحت عمل ضرب بسته است و جدول زیر را می‌توان نوشت:

X	I	w	ν	x	y	z
I	I	w	ν	x	y	z
w	w	ν	I	z	x	y
ν	ν	I	w	y	z	x
x	x	y	z	I	w	ν
y	y	z	x	ν	I	w
z	z	x	y	w	ν	I

مثلاً wx را به‌صورت زیر انجام می‌دهیم: wx یعنی اول x را اعمال کنید، سپس w را اعمال کنید. مثلث $C^A B$ تحت عمل x به‌صورت $B^A C$ در می‌آید و این مثلث تحت عمل w به‌شکل $C^B A$ در می‌آید که مجموعاً معادل اعمال z است. پس می‌توان نوشت $wx=z$.

مثال دیگری می‌زنیم: حاصل ضرب yz چیست؟ مثلث اولیه تحت عمل z بـــه $C^B A$ وسپس تحت عمل y به $B^C A$ تبدیل می‌شود. (به یاد داشته باشید که محورهای X

و Y و Z در جای خود ثابت هستند). مثلث حاصله در واقع معادل حالتی است که w به‌تنهایی اعمال شود. بنابراین می‌توان نوشت $yz=w$.

اکنون شما خود می‌توانید درستی جدول فوق را تحقیق کنید. برای وضوح بیشتر می‌توانید مقوایی را به‌شکل مثلث ببرید و رئوسش را علامت گذاری کنید. سپس مقوا را روی صفحهٔ کاغذی بگذارید و شکل مثلث را دور مقوا روی صفحه کاغذ بکشید و محورهای X و Y و Z را روی کاغذ رسم کنید.

به‌طور کلی یافتن گروه تقارن هر شکل شامل دو مرحله است:

۱ـ یافتن همهٔ تقارن‌های آن شکل

۲ـ مشخص کردن حاصل‌ضرب‌ها

در همهٔ موارد در خواهید یافت که مجموعهٔ مورد بحث تحت عمل ضرب بسته است. این موضوع به‌هیچ وجه تصادفی نیست. اگر f و g دو تبدیلی باشند که شکل را تغییر ندهند حاصلضرب fg آن‌ها نیز شکل را تغییر نخواهد داد. اگر f و g هر دو، مجموعهٔ S را بلاتغییر نگاه دارند، fg نیز همین خاصیت را دارا خواهد بود زیرا: $f(g(s))= f(s)=S$ اگر اعمال f یا g شکل را تغییر ندهد، اعمال هر دوی آن‌ها نیز شکل را تغییر نمی‌دهد.

مطالب فوق در مورد شکل‌های فضایی نیز صادق است. مکعب دارای ۲۴ تقارن چرخشی است که با افزودن انعکاس‌ها تعداد کل تقارن‌های آن ۴۸ می‌شود. می‌توانیم هر یك از رئوس مکعب را به‌محل هر رأس دیگر منتقل کنیم و اضلاع منتهی به آن رأس را به‌سه طریق چرخش دهیم. دوازده وجهی دارای ۶۰ تقارن است که با در نظر گرفتن انعکاس‌ها به ۱۲۰ بالغ می‌گردد. طبیعتاً در این گونه موارد زحمت تشکیل جدول ضرب تقارن‌ها را به‌خود نمی‌دهیم. راه‌های دیگری، غیر از به‌جدول در آوردن همهٔ حاصلضرب‌ها، برای نشان دادن روابط میان تقارن‌ها، وجود دارد که در این جا مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

«مفهوم گروه»

مفهوم «گروه» از همین مثال‌ها و مثال‌های دیگر منتزع شده است. همچنان که مفهوم «حلقه» از حساب منتزع شده است. اکنون بدون پرداختن به توضیحات، ابتدا تعریف گروه را بیان می‌کنیم و سپس به‌بحث دربارهٔ آن می‌پردازیم.

هر گروه تشکیل می‌شود از:

۱ـ مجموعه‌ای به‌نام G

۲ـ عملی که با علامت «*» نشان داده می‌شود و به‌هر عنصر x و y از G ،

عنصر $x*y$ را نسبت می‌دهد که عنصر اخیر نیز به G تعلق دارد.

این عمل باید دارای سه شرط باشد:

۳ـ عمل * دارای خاصیت شرکت پذیری است یعنی برای هر سه عنصر x و y و z متعلق به G داریم: $x*(y*x) = (x*y)*z$

۴ـ یك عنصر اینهمانی $I\in G$ وجود دارد به طوری که $I*x=x*I=x$ برای هر $x\in G$.

۵ـ برای هر عنصر $x\in G$ یك عنصر معکوس به نام $\acute{x}\in G$ وجود دارد به طوری که $x*\acute{x}= I=\acute{x}*x$

گروه‌ها به صورت‌های گوناگونی ظاهر می‌شوند. چند نمونه در این‌جا ذکر می‌شود:

الف) G مجموعهٔ تقارن‌های شکل۱ (الف) است و * عبارت است از ضرب تقارن‌های این شکل که در جدول مربوطه بیان شده است. خواص (۱) تا (۵) را در این مثال تحقیق می‌کنیم. وجود شرط ۱ کاملاً مسلم است زیرا کافی است که G یك مجموعه باشد. شرط ۲ صادق است زیرا مجموعهٔ مذکور تحت عمل ضربی که تعریف شده، بسته است. شرط ۳ وجود دارد زیرا این شرط در مورد توابع صادق است. شرط ۴ صادق است زیرا تابع اینهمانی I را قبلاً با خصوصیات لازم تعریف کرده ایم. شرط ۵ نیز ارضا شده است زیرا می‌توان نوشت: $\acute{I}=I$ و $\acute{v}=w$ و $\acute{w}=v$.

ب) G را مجموعهٔ اعداد صحیح در نظر می‌گیریم: $G=Z$. بنابراین شرط ۱ خود به‌خود صادق است. عمل جمع (+) را به‌عنوان * اختیار می‌کنیم. پس شرط ۲ نیز صادق است زیرا اگر a و b اعداد صحیح باشند، $a+b$ نیز عدد صحیح است.

شرط ۳ نیز به عنوان یکی از قوانین حساب دربارهٔ عمل جمع قبلاً پذیرفته شده است. شرط ۴ نیز دارای همین وضع است (در اینجا عدد صفر نقش I را دارد). شرط ۵ نیز قبلاً به عنوان یکی از قوانین حساب در مورد عمل جمع پذیرفته شده است.

ج) G را برابر اعداد حقیقی و * را عمل جمع در نظر می‌گیریم. خودتان این مثال را مانند حالت ب بررسی کنید.

د) G را مجموعهٔ اعداد گویای غیر صفر و * را عمل ضرب معمولی اختیار می‌کنیم. G یك مجموعه است و حاصل ضرب دو عدد گویا، عددی گویاست. پس شرط ۱ و ۲ صادق است. شرط های ۳ و ۴ نیز قبلاً در حساب به عنوان قوانین ضرب اعداد گویا بیان شده است (در مورد شرط ۴ عدد ۱ نقش I را دارد). اعداد گویا تشکیل یك میدان می‌دهند و شرط ۵ قبلاً در تعریف میدان‌ها پذیرفته شده است.

هـ) S هر زیر مجموعه ای از صفحه، G مجموعهٔ تقارن‌های آن و * ضرب توابع است. بنابراین باز هم مانند مثال الف، یك گروه داریم.

باید توجه داشت که با نقض هر یك از شرایط پنج گانه، وجود گروه منتفی می‌شود.

اگر G را مجموعه اعداد صحیح بین ۱۰ـ و ۱۰ فرض کنیم و * را جمع معمولی اختیار کنیم در این صورت شرط ۲ نقض می‌شود: ۶+۶ عنصری متعلق به G نیست.

مجموعهٔ اعداد صحیح بیشتر از ۱ تحت عمل جمع دارای عنصری که شرط ۴ را ارضا کند، نیست.

مجموعهٔ اعداد صحیح، تحت عمل تفریق شرط ۳ را نقض می‌کند زیرا عمل تفریق دارای خاصیت شرکت پذیری نیست:

$$(۲-۳)-۵=-۶\neq ۴=۲-(۳-۵)$$

مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا، تحت عمل ضرب تشکیل یك گروه نمی‌دهد. در این مورد تنها عنصری که به عنوان I می‌توان یافت ۱ است و بنابراین عنصری مانند ۰ نمی‌توان یافت که ۱=۰۰ باشد زیرا برای هر عدد گویای r داریم: $rx0=0$ بنابراین ۰۰ مساوی صفر است، نه یك.

پس هیچ یك از موارد اخیر تشکیل گروه نمی‌دهند.

اکنون به بررسی بیشتر * می‌پردازیم.باداشتن‌هرزوج‌عنصر(x,y)که $x, y\in G$ و x، عنصر منحصر به فرد $x*y$ که متعلق به G است، به دست می‌آید. به عبارت دیگر * نشان دهندهٔ تابعی است که قلمروش مجموعهٔ $G\times G$ از زوج‌های (x,y) و بردش مجموعهٔ G می‌باشد. چنین عملی را می‌توان به صورت یك تابع تعریف کرد: $G\times G\to G$: * کافی است که بپذیریم که $x*y$ شکل ساده شدهٔ $(x,y)*$ است. با این شیوهٔ بیان، شرط ۲ خود به خود برقرار است و می توان آن را حذف کرد مگر آنکه بررسی آن در حالت خاصی لازم شود. در هر صورت * در واقع تابعی است از $G\times G$ به G.

با درك این مباحث، سهولت زیادی در استفاده از نشانه‌ها حاصل می‌شود. به جای $x*y$ می‌توان نوشت xy (باید به خاطر داشت که این طرز نوشتن الزاماً به معنی ضرب عادی نیست) و همچنین به سادگی می‌توان نوشت: $x^{1}=x^{-1}$. اگر از این شیوهٔ علائم در مورد گروه اعداد صحیح تحت عمل جمع استفاده کنیم، آنگاه xy به معنی $x+y$ و x^{-1} به معنی $-x$ خواهد بود. در این گونه موارد باید از اشتباهات ناشی از کاربرد علائم احتراز شود.

اگر از شش تقارن مثلث شکل ۳، سه تقارن I،w و v را اختیار کنیم، در می‌یابیم که این سه تقارن تشکیل یك گروه کوچك در داخل گروه بزرگ‌تر می‌دهند. صحت این گفته را می‌توان از روی جدول ضرب مربوطه یا به طریق هندسی تحقیق کرد: این تقارن‌ها مثلث را معکوس نمی‌کنند و هرگاه دو تا از آن‌ها را در یکدیگر ضرب کنیم، تقارن حاصله نیز مثلث را معکوس نمی‌کند.

این گروه کوچك‌تر در داخل گروه بزرگ‌تر، نمونه‌ای از یك «زیر گروه» است.

اگر G یك گروه با عمل $*$ باشد، زیر مجموعهٔ H از G یك زیر گروه است اگر H تحت عمل $*$ تشکیل یك گروه بدهد.

همهٔ زیر مجموعه‌های H زیر گروه نیستند. اگر H را به صورت $\{x,y,z\}$ اختیار می‌کردیم در آن صورت یك گروه حاصل نمی‌شد زیرا $xy=w$ که w جزء عناصر H نیست. اگر h و k در H باشند باید داشته باشیم:

۱) $h*k\in H$

۲) $h^{-1}\in H$

از دو رابطهٔ فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

۳) $I=h*h^{-1}\in H$

به عکس، شرایط ۱ و ۲ برای تضمین اینکه H یك زیر گروه باشد، کافی است، زیرا اگر قانون شرکت پذیری در G صادق باشد، (با توجه به روابط ۱ و ۲) باید در H هم برقرار باشد.

زیر گروه‌ها در ریاضیات کاربرد فراوانی دارند. مجموعهٔ اعداد صحیح، تحت عمل جمع دارای زیر گروههایی مشتمل بر کلیهٔ اعداد صحیح زوج، کلیهٔ مضارب ۳، کلیهٔ مضارب ۴، کلیهٔ مضارب ۵، الی آخر می‌باشد. هرگروه G زیر گروه خودش است و مجموعهٔ تك عنصری $\{I\}$ نیز زیر گروه همهٔ گروه‌هاست. این گروه تك عنصری دارای جدول ضرب ساده‌ای به شکل مقابل است:

X	I
I	I

گروه تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع مجموعاً دارای شش زیر گروه متمایـز است:

$\{I,w,v,x,y,z\}$

$\{I,w,v\}$

$\{I,x\}$

$\{I,y\}$

$\{I,z\}$

$\{I\}$

تعداد عناصر هر گروه (در صورت محدود بودن) «رتبه» order آن گروه نامیده می‌شود. در حالت اخیر با گروهی سر و کار داشتیم که دارای رتبهٔ شش بود و زیر گروه‌هایی با رتبه‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۶ داشت. به سادگی دیده می‌شود که این اعداد مقسوم علیه ۶ هستند. با بررسی نمونه‌های متعدد دیگر این حدس مطرح می‌شود که همیشه رتبهٔ هرگروه بر رتبهٔ زیر گروه‌های آن تقسیم پذیر است.

صحت این حدس را می‌توان اثبات کرد. قضیه مربوطه پیش از آنکه مفهوم عینی گروه تعریف شود، توسط لاگرانژ اثبات شد!

فرض کنید $K=\{I,w,\nu,x,y,z\}$ و سپس زیر گروه $J=\{I,x\}$ را در نظربگیرید.برای هر عنصر $a\in K$ «کلاس مانده» $J\cdot a$ coset راکه‌به صورت $\{I\cdot a, x\cdot a\}$ تعریف می‌شود، تشکیل می‌دهیم.

برای تشکیل این مجموعه هریك از عناصر J را در a ضرب می‌کنیم سپس حاصلضرب‌ها را در یك مجموعه قرار می‌دهیم. دراینجا می‌توانیم این مجموعه‌ها را محاسبه کنیم:

$$J*I=\{I,x\} \qquad J*x=\{I,x\}$$
$$J*\nu=\{v,z\} \qquad J*y=\{v,z\}$$
$$J*w=\{w,y\} \qquad J*z=\{w,y\}$$

در این محاسبه چند نکته مشاهده می‌شود:

۱) فقط سه کلاس ماندهٔ متمایز وجود دارد.

۲) یکی از آنها، خود J است.

۳) هیچ دو کلاس مانده‌ای دارای عنصر مشترك نیستند.

۴) هر عنصری از K حتماً در یکی از کلاس مانده‌ها وجود دارد.

۵) تعداد عناصر همهٔ کلاس مانده‌ها، برابر است.

از نکات ۲ و ۵ معلوم می‌شود که همهٔ کلاس مانده‌ها دارای ۲ عنصرند. از نکات ۳ و ۱ معلوم می‌شود که کلاس مانده‌ها رویهم رفته دارای $۶=۲\times۳$ عنصر می‌باشند. از نکتهٔ ۴ روشن می‌گردد که K دارای ۶ عنصر است. از این بحث اولاً معلوم می‌شود که چرا رتبهٔ K بر رتبهٔ J بخش‌پذیر است، ثانیاً روشن می‌شود که نتیجهٔ این تقسیم

برابر است با تعداد کلاس مانده‌ها. اثبات قضیهٔ فوق توسط لاگرانژ نیز به همین منوال است. ابتدا باید ثابت کرد که نکات ۱ تا ۵ برای هرگروه K و هر زیر گروه J صادق است (با این تفاوت که در مورد نکتهٔ ۱ تعداد کلاس مانده‌ها عدد نامعلوم c است). اگر J از رتبهٔ j و K از رتبهٔ k باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $k=jc$. بنابراین k بر j تقسیم‌پذیر است. خواص ۲ تا ۵ از اصول مربوط به مفهوم گروه، با اندکی تبدیلات، ناشی می‌شود.

این قضیه دارای اهمیت زیادی است. از مفاهیم انتزاعی (ولو بسیار دقیق) گروه و زیر گروه، یك رابطهٔ عددی مشخص به‌دست آمده است. اگر یك گروه از رتبهٔ ۶۱۵ باشد بدون داشتن اطلاعی از جدول ضرب آن،می توانیم بگوئیم که زیر گروه‌هایش نمی‌توانند رتبه‌هایی غیر از ۱، ۳، ۵، ۱۵، ۴۱، ۱۲۳، ۲۰۵ و ۶۱۵ داشته باشند.

ممکن است این سؤال مطرح شود که آیا همهٔ این رتبه‌ها الزاماً باید در زیر گروه‌ها ظاهر شوند؟ گروه چرخش‌های دوازده وجهی، دارای رتبه ۶۰ است اما این گروه هیچ زیر گروهی با رتبهٔ ۱۵ ندارد، هرچند که ۱۵ مقسوم‌علیه ۶۰ است. بهترین پاسخ را به‌طور کلی قضیه سیلو Seylow به این سؤال می‌دهد: اگر h توانی از یك عدد اول و مقسوم‌علیه رتبهٔ G باشد، در این‌صورت G حتماً زیر گروهی با رتبهٔ h دارد. بدین ترتیب گروه دارای رتبهٔ ۶۰ زیر گروه‌هایی با رتبه‌های ۲، ۳، ۴و ۵ دارد و هر گروهی با رتبهٔ ۶۱۵ دارای زیر گروه‌هایی با رتبه‌های ۳، ۵، و ۴۱ است.

هم شکلی Isomorphism

راه‌های دیگری نیز برای تشکیل گروه‌هایی با ۶ عنصر وجود دارد. اگر مجموعهٔ S={a,b,c} را در نظر بگیریم، شش نوع رابطهٔ یك به یك bijection از S به S وجود دارد که آنها را مطابق جدول زیر، p، q، r،s، t و u می‌نامیم:

	p	q	r	s	t	u
a	a	a	b	b	c	c
b	b	c	a	c	a	b
c	c	b	c	a	b	a

در جدول فوق مثلاً مقدار تابع S به ازای b یعنی S(b) عبارت از آنچه که در ردیف b، ستون S قرار دارد، یعنی c. روابط یك به یك میان هر مجموعه و خود آن، «تبدیل» Permutation آن مجموعه نامیده می‌شود.

شش رابطهٔ یك به یك فوق الذکر تحت عمل ضرب توابع تشکیل یك گروه می دهند که جدول ضرب آن به شکل زیر است:

X	p	q	r	s	t	u
p	p	q	r	s	t	u
q	q	p	t	u	r	s
r	r	s	p	q	u	t
s	s	r	u	t	p	q
t	t	u	q	p	s	r
u	u	t	s	r	q	p

مثلا، برای یافتن rs، می‌توان نوشت:

$$rs(a)= r(s(a))= r(b)=a$$
$$rs(b)=r(s(b))= r(c)=c$$
$$rs(c)=r(s(c))=r(a)=b$$

بنابراین اثر rs همانند q است، پس $rs=q$.

این گروه همان گروه تقارن مثلث متساوی الاضلاع نیست زیرا عناصرش با آن تفاوت دارد. ولی علاوه بر مساوی بودن رتبهٔ این دوگروه تشابه زیادی میان آنها وجود دارد. هریك از تقارن‌های مثلث، ترتیب رئوس را به شکل زیر تغییر می‌دهد:

	I	w	v	x	y	z
A	A	B	C	A	C	B
B	B	C	A	C	B	A
C	C	A	B	B	A	C

با تبدیل حروف بزرگ A و B و C به حروف کوچك a و b و c می‌توان میان حرکت‌های صلب و تبدیل‌ها رابطهٔ یك به یكی به‌صورت زیر مشخص کرد:

p	q	r	s	t	u
I	x	z	w	v	y

اگر دو جدول ضرب را مجدداً طوری بنویسیم که عناصر نظیر یکدیگر در ردیف فوق، در ردیف فوقانی و کناری جدول ضرب‌ها در موقعیت‌های مشابه قرار گیرند و آنگاه جدول‌ضرب‌ها را پر کنیم، دو جدول زیر حاصل می‌شود:

x	i	w	v	x	y	z
i	i	w	v	x	y	z
w	w	x	i	z	x	y
v	v	i	w	y	z	x
x	x	y	z	i	w	v
y	y	z	x	v	i	w
z	z	x	y	w	v	i

x	p	s	t	q	u	r
p	p	s	t	q	u	r
s	s	t	p	r	q	u
t	t	p	s	u	r	q
q	q	u	r	p	s	t
u	u	r	q	t	p	s
r	r	q	u	s	t	p

علاوه بر آن که عناصر نظیر در ردیف‌های فوقانی و کناری جدول در موقعیت‌های مشابه قرار دارند، درداخل جدول نیز عناصر نظیر در موقعیت‌های همانند واقعند. مثلاً I و p هر دو در موقعیت‌های زیر قرار دارند:

*					
		*			
	*				
			*		
				*	
					*

x و q هم در موقعیت‌های زیر واقعند:

			*		
				*	
					*
*					
		*			
	*				

البته وجود این تشابه چندان غیرمنتظره نیست زیرا ارتباط بسیار نزدیکی میان نحوهٔ ضرب تبدیل‌ها و تقارن‌ها وجود دارد. پس معلوم می‌شود که دوگروه متفاوت می‌توانند دارای ساخت یکسان باشند. تفاوت میان این دوگروه تنها در اسامی عناصر آنهاست

برای آنکه این بحث از دقت بیشتری برخوردار شود تابع f را در نظر می‌گیریم

به‌طوری که: $f(I)=p$ و $f(x)=q$ الی آخر. این تابع ارتباط میان عناصر دو گروه را بیان می‌کند. قلمرو f، گروه اول و برد آن گروه دوم است. دو عنصر α و β از گروه نخست را در نظر می‌گیریم. از ردیف α و ستون β عنصر $\alpha*\beta$ را پیدا می‌کنیم. سپس به‌طریق مشابه در جدول دوم حاصل ضرب $f(\alpha)*f(\beta)$ را از ردیف $f(\alpha)$ و ستون $f(\beta)$ به دست می‌آوریم. اما همان طور که قبلاً دیدیم در این محل عنصر نظیر $\alpha*\beta$ قرار دارد که عبارتست از $f(\alpha*\beta)$. پس قرار گرفتن عناصر نظیر در موقعیت‌های مشابه را می‌توان با فرمول مقابل بیان کرد: $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$ (به‌ازای هر α و β در گروه اول)

مزیت استفاده از فرمول اخیر در این است که خواص هندسی جدول‌های ضرب در آن دخالتی ندارد. اگر دو گروه G و H داشته باشیم بطوری که بتوان رابطهٔ یك به‌یك $f:G\to h$ را میان آنها یافت که به ازای هر α و β متعلق به G رابطهٔ $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$ بر قرار باشد، در آن صورت دو گروه G و H را «همشکل» (Isomorphic) می‌نامند. گروه‌های همشکل دارای ساخت انتزاعی یکسان هستند و تنها تفاوت آنها در عناصرشان است. از آنجا که ساخت اساسی گروه‌ها به‌نحوهٔ ضرب عناصر آنها بستگی دارد، در اغلب موارد می‌توان گروه‌های همشکل را برابر یکدیگر به‌شمار آورد.

گروه نخست از دو گروه فوق، همانطور که دیدیم دارای شش زیر گروه است. به‌سادگی می‌توان دریافت که گروه دوم نیز که همشکل گروه اول است، دارای همین تعداد زیر گروه می‌باشد. مثلاً به‌ازای زیر گروه $\{I,w,v\}$ از گروه اول، زیر گروه $\{p,s,t\}$ از گروه دوم وجود دارد.

گروه‌های هم‌رتبه، همیشه همشکل نیستند. گروه دیگری با رتبهٔ ۶ در نظر می‌گیریم که عمل * در آن باقیماندهٔ مجموع دو عنصر در تقسیم به‌۶ است. جدول ضرب این گروه به‌شکل زیر خواهد بود:

+	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۰
۲	۲	۳	۴	۵	۰	۱
۳	۳	۴	۵	۰	۱	۲
۴	۴	۵	۰	۱	۲	۳
۵	۵	۰	۱	۲	۳	۴

این گروه را M می‌نامیم. آیا M با گروه تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع (گروه K) همشکل است؟

یکی از راه‌های تحقیق این امر، آزمایش کلیه رابطه‌های یك به یك ممکنه بین M و K و تحقیق برقراری رابطهٔ $f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$ می‌باشد. اگر مثلاً این حالت را آزمایش کنیم که $f(0)=I, f(1)=w, f(2)=v, f(3)=x, f(4)=y, f(5)=z$ در این صورت خواهیم داشت:

$$f(1+2) = f(3) + x$$
$$f(1) * f(2) + \omega\nu = I$$

بنابراین تابع f دارای خاصیت موردنظر نیست. برای آنکه همهٔ حالات ممکنه را در مورد f آزمایش کنیم باید ۷۲۰ حالت را آزمایش کنیم.

به جای این کار می‌توانیم خواصی از M را جستجو کنیم که به نام عناصر بستگی نداشته باشد. یکی از این خواص، همان طور که دیدیم، عبارت است از تعداد زیر گروه‌های هر گروه. اگر به این کار بپردازیم می‌بینیم که M دارای زیر گروه‌های زیر است:

$\{0\}$، $\{0,2,4\}$، $\{0,3\}$ و M. پس M دارای ۴ زیر گروه است و به همین دلیل نمی‌تواند با k که ۶ زیر گروه دارد همشکل باشد.

بی‌شك این روش آسان‌تر از آزمایش ۷۲۰ حالت است ولی هنوز راه ساده‌تری وجود دارد. عمل ضرب گروه M دارای خاصیت جابجائی است (با توجه به قوانین عمل جمع در حساب) یعنی $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. فرض کنید که بین M و K همشکلی $F: M \to K$ برقرار باشد. در این صورت: $f(\alpha + \beta) = f(\beta + \alpha)$ از طرفی با توجه به رابطهٔ $f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$ باید داشته باشیم:

$$f(\alpha)f(\beta) = f(\beta)f(\alpha)$$

به عبارت دیگر، k نیز بایدبرای عمل ضرب دارای خاصیت جابه‌جایی باشد. اما $vx=y$ و $xv=z$ پس k دارای خاصیت جابه‌جایی نیست و بنابراین وجود همشکلی میان گروه M و گروه تقارن K ناممکن است.

استفاده از مبحث همشکلی در بسیاری از موارد کار را ساده می‌کند. در ریاضیات این امر مهم است که بتوانیم ماهیت مشترك دو مسئلهٔ ظاهراً متفاوت را تشخیص دهیم. **اگر دو مسئله دارای ساخت‌های همشکل باشند، این امر می‌تواند به یافتن ارتباط‌های موجود میان آنها کمك کند.**

در مثال فوق با استفاده از ارتباط شناخته شدهٔ موجود بین تقارن‌های مثلث و تبدیل‌های سه عنصر، همشکلی را به‌دست آوردیم. گاهی اوقات اوضاع به‌قرار دیگری است: به یك همشکلی بر می‌خوریم و به جستجوی علت وجود آن بر می‌آییم.

گروه خاصی از تبدیلات روی مجموعهٔ پنج عنصری وجود دارد که به معادلهٔ کلی درجهٔ پنج وابسته است (عناصر مورد تبدیل، ۵ ریشهٔ معادله مذکور می‌باشند). این گروه دارای ۶۰ عنصر است. گروه چرخش‌های دوازده وجهی نیز ۶۰ عنصر دارد. می‌توان ثابت کرد که این دو گروه هم‌شکلند. با توجه به این موضوع، فلیکس کلاین Felix Klein ارتباط عمیقی میان سه مقوله کشف کرد: **معادلهٔ درجهٔ پنج ـ گروه‌های چرخش ـ نظریهٔ توابع مختلط.**

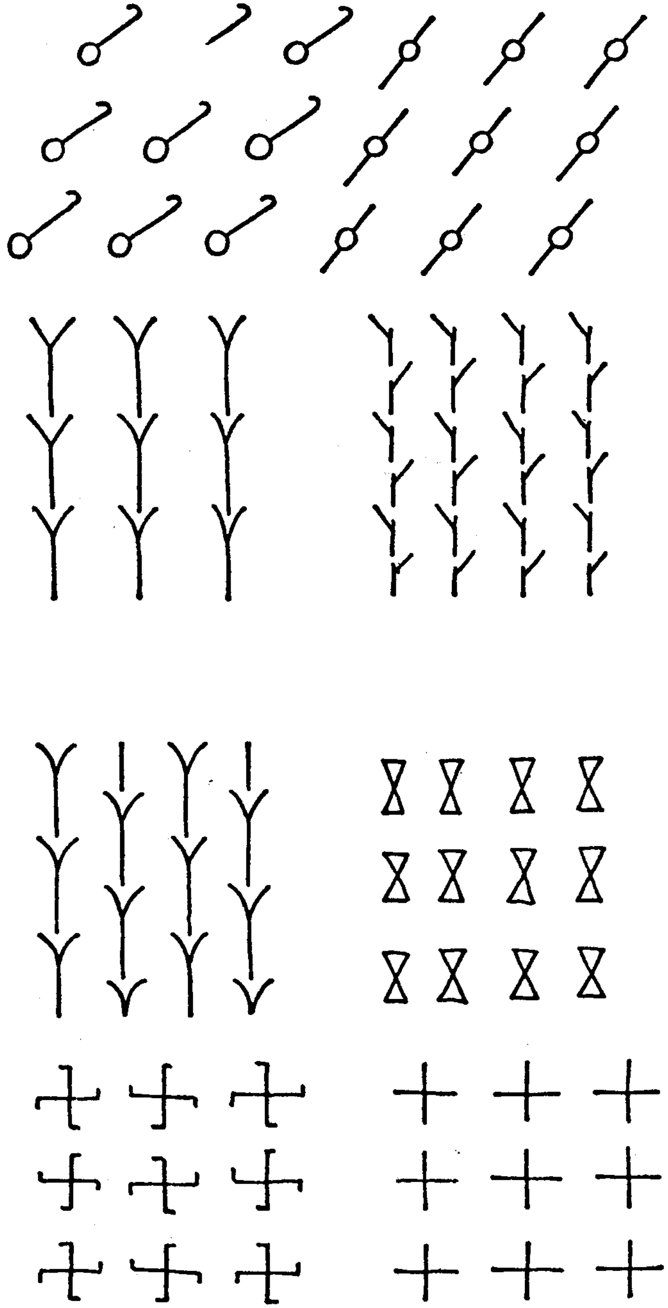
بدین ترتیب، مثلاً توضیح این حقیقت آشکار، یافته شد که چرا معادلهٔ درجه پنج را می‌توان به کمك نوع خاصی از توابع مختلط که توابع بیضوی خوانده می‌شوند، حل کرد. پیش از این کشف کلاین، مطلب اخیر را تنها به کمك محاسبات عادی اثبات می‌کردند. گذشته از این، ارتباط فوق‌الذکر، تصادفی به نظر می‌رسید. کلاین علت وجود این همانندی را کشف کرد.

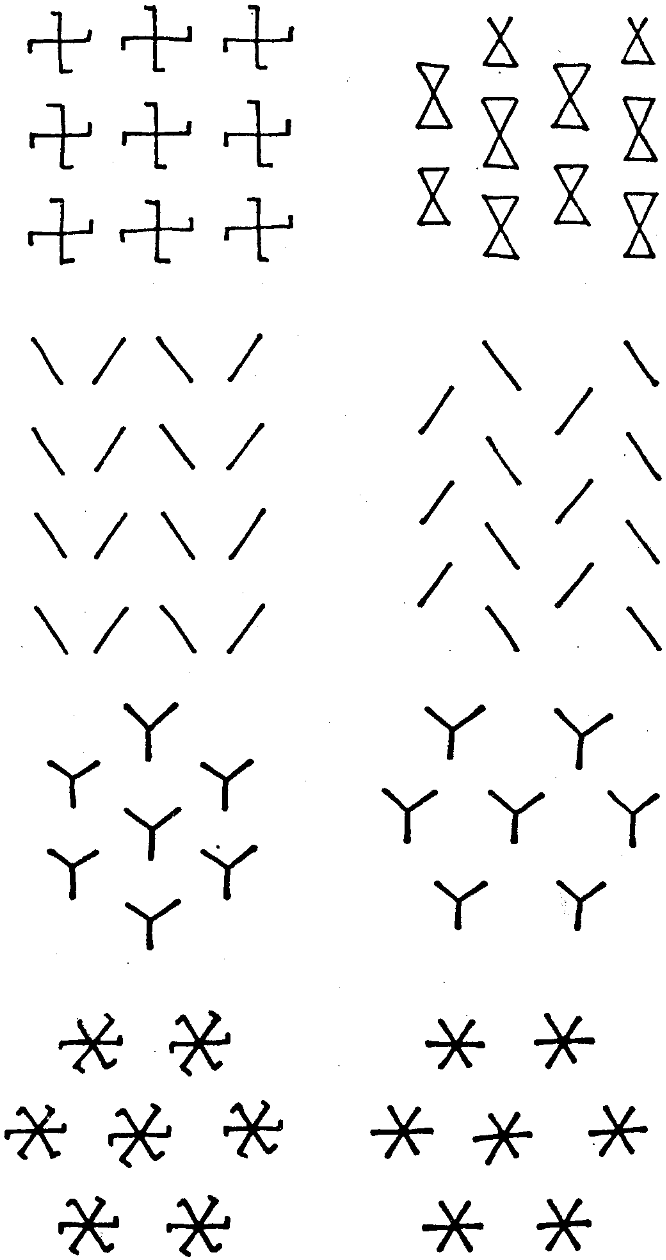
«دسته‌بندی الگوها»

هر جا که تقارن‌ها وجود داشته باشند، نظریهٔ گروه‌ها نیز ظاهر می‌شود. این نظریه، امکان بیان تقارن‌ها را براساس گروه مربوط فراهم می‌آورد. مثلاً منظور از تقارن نوع دوازده وجهی، تقارنی است که گروه آن با گروه تقارن دوازده وجهی همشکل باشد.

علاوه براین، به کمك نظریهٔ گروه‌ها می‌توان تقارن‌ها را دسته‌بندی کرد. در حالات خاصی می‌توان گفت: این تقارن‌ها و تنها این تقارن‌ها، امکان پذیرند.

نقش‌های کاغذ دیواری در حالت انتزاعی، صورت بندی‌های متقارنی در صفحه هستند. گروه تقارن الگوی هر کاغذ دیواری شامل حرکات صلب خاصی است و زیر گروهی از گروه G ـ گروه همهٔ حرکات صلب صفحه ـ می‌باشد. برای ادامهٔ بحث، باید دقیقاً روشن کنیم که منظورمان از الگوی کاغذ دیواری چیست؟ این الگوها نقش‌هایی هستند که تا حد دلخواه ادامه می‌یابند و باید دارای کیفیت گسسته باشند، بدین معنی که به صورت نقش‌هایی جدا از یکدیگر و نه پیوسته به‌هم، قرار گرفته باشند. (در این مورد بیان ریاضی دقیقی وجود دارد که بیشتر جنبهٔ تخصصی دارد). با دسته‌بندی گروه‌های مختلف حرکات صلب، معلوم می‌شود که دقیقاً ۱۷ الگوی کاغذ دیواری وجود دارد (که ۹ تای آن‌ها در واقع مثل قالی «خواب» ـ پرزهای جهت‌دار ـ دارد). این الگوها در شکل ۴ ترسیم شده است.





شکل ۴

اگر آلبوم نمونه‌های کاغذ دیواری را تماشا کنید می‌بینید که در آن ده‌ها و بلکه صدها نوع الگوی گوناگون دیده می‌شود و شاید تصور کنید که دسته‌بندی کردن آن‌ها فایده‌ای در برندارد. با این‌همه اگر از رنگ، اندازه و کیفیت کاغذ دیواری چشم‌پوشی کنید (که البته همهٔ این‌ها به‌کاربرد عملی کاغذ دیواری مربوط می‌شود!) و ساخت اساسی نقش‌ها را مورد نظر قرار دهید، این حقیقت آشکار می‌شود که فقط ۱۷ نوع نقش کاملاً متفاوت وجود دارد. گفته می‌شود که همهٔ این ۱۷ نوع نقش در کارهای سفالگران هنر اسلامی به‌کار گرفته می‌شده است. برای سرگرمی بد نیست که شما هم آلبومی از نمونه‌های کاغذ دیواری فراهم کنید و ببینید آیا طراحان امروزی هم همهٔ جوانب را در نظر داشته‌اند. معلوم نیست که جواب حتماً مثبت باشد. مسئلهٔ همانند بحث فوق در فضای سه بعدی ـ دسته‌بندی ۲۳۰ گروه تقارن ممکنه ـ در بلورشناسی اهمیت زیادی دارد. از این موضوع می‌توان نتایجی در مورد ساخت مولکولی بلورها به‌دست آورد.

رمز و راز عددها و شکل‌ها

۱. یك عدد سه رقمی پیدا کنید که مجذور آن عددی شش رقمی بشود که به همان سه رقم ختم شده باشد.

۲. دایره‌ای که یك قطر آن رسم شده است، مفروض است. می‌خواهیم، تنها به‌کمك خط‌کش، از نقطه‌ای واقع در خارج دایره، عمودی بر این قطر رسم کنیم.

۳. دست‌کم چند برش لازم است تا بتوانیم از یك مکعب، ۶۴ مکعب کوچکتر به دست آوریم؟ بعد از هر برش، قطعه‌های بریده شده را می‌توانید به هر ترتیبی که مایل باشید روی هم بگذارید.

۴. شما می‌دانید که یا ۳ نفر و یا ۴ نفر از دوستان شما به منزلتان می‌آیند. شما می‌خواهید یك «کیك» ۶۰۰ گرمی را از قبل طوری تقسیم کنید که هر وضعی پیش آمد (چه ۳ نفر به دیدار شما آمدند و چه ۴ نفر) بتوانید شیرینی را به طور مساوی بین آن‌ها تقسیم کنید. البته، می‌شود نان شیرینی را به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم کرد، ولی اگر دقت کنید، تقسیم آن به ۶ قسمت کافی است. چطور؟

۵. چهار نقطه را روی یك صفحه طوری قرار دهید که فاصله‌های بین هر دو نقطهٔ دلخواه از آن‌ها، تنها با دو مقدار بیان شود.

پاسخ در صفحهٔ ۱۱۵