آشتی با ریاضیات

۱

فروردین ۱۳۶۱

دوره دوم

آشتی باریاضیات

سردبیر : پرویز شهریاری

نشریهٔ دو ماهه. هرسال ۶ شماره منتشر
می‌شود. بهای اشتراک سالیانه ۷۲۰ ریال

نشانی پستی : تهران ـ صندوق پستی ۴۱-۵۴۱-۳۴

سال‌ششم ـ شمارهٔ ۱ (شماره ردیف ۲۱)

فهرست مطالب

۱۲۰ ریال

پول اشتراک و کمک‌های خود را به‌حساب ۱۷۶۰ بانک تجارت (بازرگانی سابق) تهران ـ چهارراه ولی‌عصر، به‌نام سردبیر بفرستید وفتوکپی رسید آنرا همراه‌با نشانی‌کامل‌خود برای‌ما بفرستید.

پ. لوکوربه‌یه[1]
ترجمه محمدباقری

انحنای فضا

در بهار سال ۱۸۵۴، یك ریاضی‌دان جوان آلمانی به نام برنارد ریمن[2] به شدت نگران آینده‌ی خود و امتحانی بود که به زودی درپیش داشت. او در آن ایام بیست و هشت ساله بود و هنوز هیچ درآمدی نداشت. با چند سکه‌ای که پدرش (یك کشیش پروتستان در یکی از شهرهای کوچك هانوور[3]) هر ماه برایش می‌فرستاد، زندگی محقری را می‌گذراند. برنارد با فروتنی به پدر و برادرش می‌نوشت که اغلب استادان مشهور دانشگاه، در برلن و گوتینگن، بی‌هیچ دلیلی محبت فوق‌العاده‌ای نسبت به وی ابراز می‌کنند.دراین زمان، او مدرك دکتریش را گرفته بود و برای آن که به سمت دانشیاری (بدون دریافت حقوق) منصوب شود، باید خطابه‌ی قابل قبولی در محضر کلیه‌ی اعضای دانشکده‌ی فلسفه در گوتینگن، ایراد می‌کرد. برنارد سه موضوع را پیشنهاد کرده بود. در آن روزها به برادرش نوشت: «دو موضوع اول را به خوبی تهیه کرده‌بودم، اما گوس موضوع سوم را انتخاب کرد و حالا به زحمت افتاده‌ام.»

کارل فردریك گوس[4]، سرکرده‌ی ریاضی دانان آلمان و مایه‌ی مباهات دانشکده‌ی خود بود. در تصور برنارد از عرش اعلا، مبل کار گوس از بارگاه

1. P. Lecorbeiller

2. Bernhard Riemann

3. Hanover

4. Karl Friedrch Gauss

ربانی فاصله‌ی چندانی نداشت. (این برداشت، امروزه نیز در گوتینگن عمومیت دارد.) عنوان موضوعی که گوس برای سخن‌رانی ریمن جوان برگزید، عبارت بود از: «فرض‌هایی که پایه‌ی هندسه را تشکیل می‌دهند.» گوس در مورد این عنوان چیزی جز چند بررسی مبهم انتشار نداده بود، با این حال، این موضوع را بر دو موضوع دیگری که ریمن پیشنهاد کرده بود ترجیح داد، زیرا کنجکاو بود ببیند این مرد جوان در مورد چنین موضوع ژرف و غریبی چه خواهد گفت؛ موضوعی که گوس خود بسیار بدان اندیشیده بود و پیرامون آن، کار زیادی که هنوز بر دیگران چندان روشن نبود، انجام داده بود.

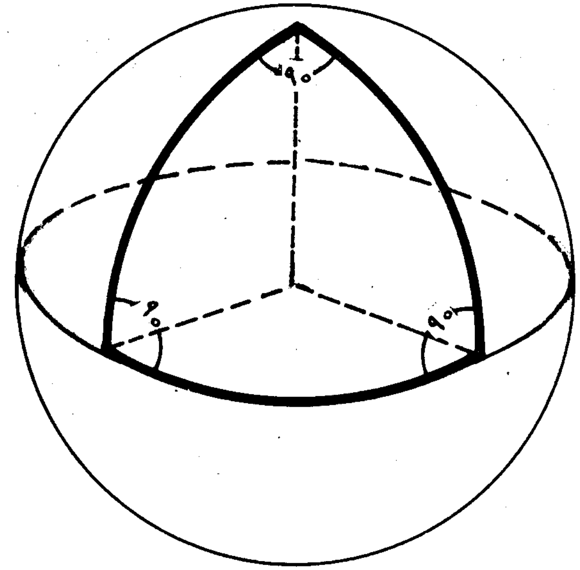
روز سخن‌رانی عمومی ریمن، شنبه دهم ژوئن ۱۸۵۴ بود. اغلب مستمعین او را استادان برجسته، تاریخ‌دانان،فیلسوفان و خلاصه افراد غیر ریاضی دان ، تشکیل می‌دادند. ریمن قصد داشت درباره‌ی انحنای فضاهای n- بعدی، بدون نوشتن هیچ معادله‌ای، سخن‌رانی کند. آیا این کار یك خودخواهی مؤدبانه یا یك طرح فرصت‌طلبانه بود؟ پاسخ این سؤال را هرگز نخواهیم دانست. قدر مسلم این که، بدون هیچ گونه معادله، گوس منظور او را به خوبی دریافت به‌طوری که پس از سخن‌رانی، هنگام بازگشت به‌خانه با حرارت فوق‌العاده‌ای در مورد احساس ستایش شگرف خود نسبت به نظراتی که توسط ریمن عرضه شده بود، با همکارش ویلهلم وبر[5] سخن گفت.

اشتیاق گوس به جا بود. برنارد جوان به قلمرو آن چنان نویی از اندیشه دست یافته بود که در آن روزگار، کم‌تر دانشمندی می‌توانست کار او را دنبال کند. افکار انتزاعی او، نیم قرن بعد در کارهای آلبرت انیشتن با واقعیت تجربی درآمیخت. انیشتن متوجه شد که اندیشه‌های ریمن را می‌توان مستقیماً در مسئلهٔ اندرکنش نور و گرانش به کار گرفت و این اندیشه‌ها را مبنای نظریهٔ نسبیت عمومی خود - که امروزه برداشت ما از جهان حاکم است - قرار داد.

5. Wilhelm Weber

حال به سال ۱۸۵۴ برمی گردیم تا ببینیم ریمن در آن روز از ماه ژوئن چه نظراتی را در سخن‌رانی خود ابراز کرد. پیش از پرداختن به نظرات ریمن، لازم است زمینه‌ای نسبتاً ابتدایی دراین مورد داشته باشیم.

خواننده بی‌شك با عناصر هندسه‌ی مسطحه آشناست. خط راست کوتاه‌ترین مسیر بین دونقطه است؛ خطوط موازی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ مجموع سه زاویه‌ی مثلث برابر دوقائمه یا ۱۸۰ درجه است و احکام دیگری از این قبیل. هم‌چنین می‌دانیم که در هندسه‌ی اشکالی که روی سطح کره ترسیم می‌شوند، قوانین دیگری حاکم است. کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه روی سطح کره، منطبق بریك «دایره عظیمه» است؛ این منحنی دراثر تقاطع کره با صفحه‌ای که از دونقطه‌ی مزبور و مرکز کره می‌گذرد و کره را به دونیمهٔ مساوی تقسیم می‌کند، به‌دست می‌آید. دودایره‌ی عظیمه همیشه یکدیگر را دردونقطه قطع می‌کنند؛ مثلاً هر دو نصف‌النهار از زمین، همیشه در قطب شمال



شکل ۱ مثلث‌هایی که روی صفحه وروی کره رسم می‌شوند، از قوانین متفاوتی تبعیت می‌کنند. روی صفحه، همیشه مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است. تقاطع سه دایره‌ی عظیمه روی سطح کره، سه زاویه می‌سازد که مجموعشان (مثلاً) ۲۷۰ درجه می‌شود.

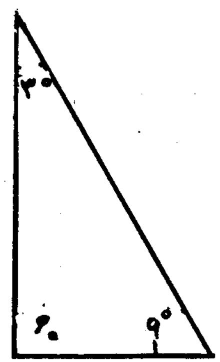
و قطب جنوب باهم تلاقی می‌کنند. اگر قطعاتی از سه دایره‌ی عظیمه (مثلاً یك‌چهارم خط استوای زمین و نیمه‌های شمالی دونصف‌النهار) یکدیگر را قطع کنند وبدین ترتیب یك «مثلث کروی» ایجاد کنند، مجموع سه زاویه‌ی آن (در این مثال) برابر ۲۷۰ درجه یا سه قائمه خواهد بود. تفاوت بین این مثلث و مثلث مسطحه از این جا ناشی می‌شود که مثلث کروی به جای سطح صاف، روی سطح انحنادار رسم شده است.

حال، چگونه در می‌یابیم که سطح یك میز صاف، و سطح زمین کروی است. در همه‌ی تمدن‌های اولیه چنین تصور می‌شد که زمین به شکل صفحه‌ی مدوری است که کوه‌ها سطح آن را ـ هم چون غذا بر میز شاهان ـ برآمده کرده‌اند. پیش از آن که انسان بتواند از جو زمین خارج شود و از دور دست بدان بنگرد، مشاهده‌ی شکل حقیقی زمین برایش ناممکن است؛ پس اخترشناسان یونانی چگونه به این نتیجه دست یافتند که زمین گرد است؟ آنان مشاهده کرده بودند که ستاره‌ی قطبی در یونان نسبت به مصر در ارتفاع بیش‌تری از آسمان قرار دارد. پس معلوم می‌شود که برای پی بردن به گرد بودن یك کره، یاباید از فاصله‌ی دور به آن نگاه کنیم و یا آن که روی آن بایستیم و اجسامی را که در دور دست واقع‌اند، مورد مشاهده قرار دهیم.

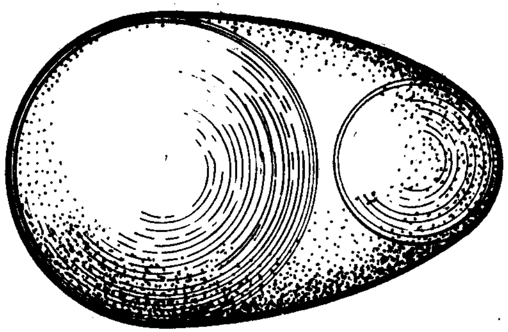
علاوه براین، انسان از دو روش کاملاً متفاوت دیگر نیز توانست به گرد بودن زمین پی ببرد. یکی از این دوراه دریانوردی در قلمرو زمین بود. انسان دریافت که اگرچه زمین هیچ «لبه» و هیچ مرزی ندارد، مساحت آن محدود است. این حقیقت قابل توجهی است: سطح زمین بدون داشتن هیچ کرانه‌ای، محدود است. بی‌شك، این وضع امکان مسطح بودن زمین را منتفی می‌سازد. سطح یك صفحه، بی‌کرانه و در عین حال نامحدود است. (در گفت‌وگوی روزمره‌ی، دوواژه‌ی «بی‌کرانه» و «نامحدود» مترادف محسوب می‌شود و این نشان می‌دهد که کرویت زمین هنوز به‌طور واقعی در ضمیر ما جای گزین نشده است.)

بنابراین، حتی اگر ابرهای غلیظی همواره کره‌ی زمین را می‌پوشاندند، انسان به گرد بودن زمین آگاهی می‌یافت. حال فرض کنید که به طریقی از پیموده شدن سراسر زمین توسط بشر، جلوگیری می‌شد. در این صورت، هنوز راه دیگری وجود داشت که انسان دریابد که برروی یك کره زندگی می‌کند؛ این راه، استفاده از هندسه‌ی کروی است که به بحث فعلی ما مربوط است. اگر مثلث کوچکی ـ مثلاً به اضلاع حدود ۱۰ متر ـ را روی سطح زمین در نظر بگیریم، تشخیص آن از مثلث مسطح ، امکان‌پذیر نیست؛ فزونی مجموع زوایای آن، نسبت به ۱۸۰ درجه، آن‌قدر اندك است که قابل اندازه‌گیری نیست. هرچه مثلث‌های بزرگ‌تر و بزرگ‌تری را روی سطح کروی زمین درنظر بگیریم، انحنای آن‌ها بیش‌تر و بیش‌تر اهمیت می‌یابد و در فزونی مجموع زوایای آن‌ها نسبت به ۱۸۰ درجه، نمودار می‌گردد. بنابراین با گسترش هرچه بیش‌تر شیوه‌های اکتشاف و نقشه‌برداری، انسان سرانجام می‌توانست کرویت زمین را ثابت کند و به کمك اندازه‌گیری‌های مربوطه، شعاع کرهٔ زمین را به‌دست آورد. بدنیست قدری مشروح‌تر به این موضوع بپردازیم.

گذشته از صفحه و کره، انواع پرشماری از سطوح وجود دارد. تخم‌مرغ را در نظر بگیرید، که دارای یك سر بزرگ و یك سر کوچك است. یك تکه مدور از سر بزرگ‌تر پوستهٔ تخم‌مرغ،شبیه بخشی از یك کره به نظر می‌رسد و یك تکه‌ی مدور از سر کوچك‌تر پوسته‌ی تخم‌مرغ، شبیه بخشی از یك کره است که شعاعش کوچك‌تر از کره‌ی اول باشد. تکه‌ای که به انتهای کوچك‌تر تعلق‌دارد، خمیده‌تر از تکه‌ی متعلق به سر بزرگ‌تر، به‌نظر می‌رسد. هندسه‌دانان، انحنای کره را به صورت عکس مجذور شعاع آن، تعریف می‌کنند. بنابراین هرچه شعاع کوچك‌تر باشد، انحنا بیش‌تر است، و برعکس.

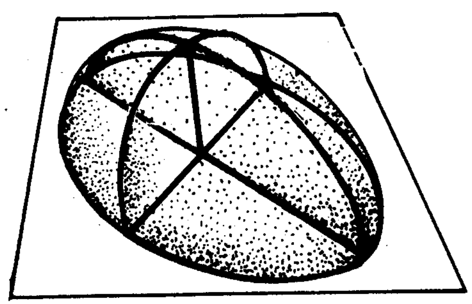


حال، اگر تکه‌ای از پوسته‌ی تخم‌مرغ را که به ناحیه‌ی میانی آن تعلق دارد، به ما بدهند، آیا می‌توانیم انحنای آن را تعریف کنیم؟ این کار قدری



شکل ۲ تخم‌مرغ دارای منحنی است، چنان که گویی سر بزرگش بخشی از یك کره و سر کوچکش از یك کره‌ی اکوچك تر است. بخش میانی دارای انحنای متفاوتی است.

دشوار است زیرا چنین تکه‌ای را نمی‌توان با بخشی از یك کره‌ی ساده یکسان دانست. مسأله به صورت زیر حل می‌شود. فرض کنید که این تکه را که کم و بیش شکل یك سطح بیضوی در امتداد طولی را دارد، روی میز قرار می‌دهیم و بدین ترتیب شکل یك گنبد کم ارتفاع را به خود می‌گیرد. هر مقطع قائم از این گنبد، یك منحنی کاو (مقعر) به طرف پایین خواهد بود. هم‌چنین، هر یك از این مقاطع قائم شبیه بخشی از یك دایره خواهد بود، اما همه‌ی این دایره‌ها دارای شعاع برابر نخواهند بود. مقطعی که از کم عرض‌ترین قسمت قاعده می‌گذرد، کوچك‌ترین شعاع و مقطعی که در جهت طولی داده شود، بزرگ‌ترین شعاع را خواهد داشت. شعاع اول را R_1 و شعاع دوم را R می‌نامیم. هندسه‌دانان در این مورد به نوعی، میانگین می‌گیرند و انحنای آن بخش کوچك از پوسته‌ی

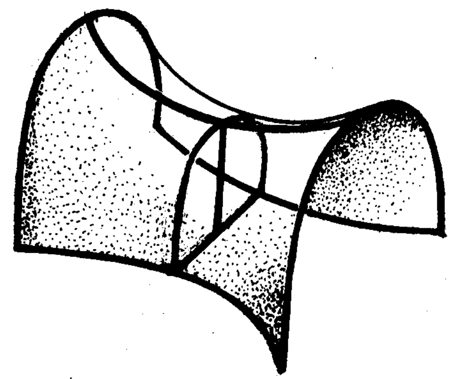


شکل ۳ اگر نیمه‌ی تخم مرغی روی میز قرار گیرد و با مقاطع قائم برش داده شود، این مقاطع به‌صورت منحنی‌هایی با تقعر رو به‌پایین ، و به‌شکل بخش‌هایی از دایره‌های دارای شعاعهای متفاوت خواهد بود.

تخم‌مرغ را به صورت عکس حاصل‌ضرب $R_1 R_2$ تعریف می‌کنند. می‌بینید که اگر پوستهٔ تخم‌مرغ به شکل کره‌ی کامل بود، این راه دوباره به همان تعریف پیشین منتهی می‌شد.

براساس این تعریف‌ها در می‌یابیم که انحنای یك تکه‌ی کوچك از پوسته‌ی تخم‌مرغ، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. سخن گفتن از انحنای تمامی تخم‌مرغ نیز معنایی نخواهد داشت و تنها می‌توانیم در مورد انحنای یك تکه‌ی کوچك، صحبت کنیم.

حال، سطح یك زین اسب را در نظر بگیرید. مقطع قائم عرضی در آن، یك منحنی با تقعر به سمت پایین و مقطع قائم‌طولی، یك منحنی باتقعر روبه بالا، پدید می‌آورد. این امر حتی یك تکه‌ی کوچك از سطح زین اسب را از یك تکه‌ی کوچك از پوسته‌ی تخم‌مرغ، متمایز می‌سازد. به گفته‌ی هندسه‌دانان، پوسته‌ی تخم‌مرغ همه جا دارای انحنای مثبت و زین اسب همه جا دارای انحنای منفی است. انحنای یك تکه‌ی کوچك از سطح زین اسبی را می‌توان دوباره به صورت عکس‌حاصل ضرب $R_1 R_2$ تعریف کرد، این بار بایدعلامت منفی برای آن قائل شد.

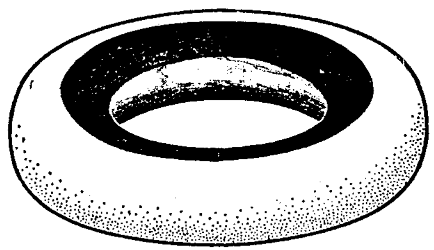


شکل ۴ اگر زین اسب درجهت طولی برش‌داده شود، مقاطع‌حاصله،منحنی‌های‌رو به بالاخواهد بود و مقاطع عرضی، منحنی‌های رو به پایین با شعاع‌های متفاوت خواهد بود. سطح زین اسبی بنا به‌تعریف، دارای انحنای منفی است.

در این جا به موضوع دیگری نیز باید توجه داشت. تویی یك لاستیك اتوموبیل را در نظر بگیرید. اگر نیمه‌ی داخلی آن را (که مقابل فضای خالی وسط لاستیك است) با نیمه‌ی خارجی مقایسه کنیم، می‌بینیم که هر بخش کوچکی از نیمه‌ی خارجی دارای انحنای مثبت است، در حالی که هر بخش کوچك از نیمهٔ داخلی- مانند سطح زین اسبی- انحنای منفی دارد. بنابراین نباید تصور کرد که در تمام نقاط یك سطح، انحنا باید یا منفی و یا مثبت باشد؛ وقتی روی سطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر می‌رویم، انحنا نه تنها می‌تواند کم و زیاد شود، بلکه می‌تواند تغییر علامت هم بدهد.

* * *

به یاد داشته باشید که آن چه در این جا آورده شد، نگاهی گذرا به مطالبی بود که تا پیش از زمان ریمن، درباره‌ی انحنای سطوح می‌دانستند. مطالب مذکور در قرن هیجدهم بر لئونارداولر[6]- ریاضی‌دان سویسی که قدرت تخیل و بازده کاری چشمگیری داشت - آشکار گشته بود و توسط گروهی از هندسه‌دانان فرانسوی در مدرسه‌ی «پلی‌تکنیك» نوبنیاد این کشور، گسترش یافت. سپس در سال ۱۸۲۷ گوس، ممتحن ارشد ریمن، تعمیم و دقت بیش‌تری به موضوع بخشید. وی یادداشت‌هایی درباره‌ی سطوح منحنی منتشر کرد که آن چنان درخشان و کامل بود که حتی امروز نیز می‌توان از آن در درس‌های دانشگاهی سود جست.

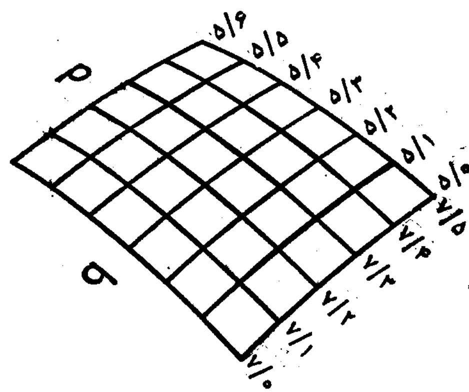


شکل ۵ تویی لاستیك اتومبیل، در نیمه‌ی خارجی، انحنای مثبت و در نیمه‌ی داخلی (سیاه) انحنای منفی دارد.

6. Leonhard Euler

گوس از این جا آغاز کرد که جغرافی‌دانان موقعیت هر شهر را در روی کره‌ی زمین با دادن طول و عرض جغرافیایی مشخص می‌کنند. آنها نصف‌النهارهای مربوط به طول جغرافیایی (مثلاً نصف‌النهاری که همه‌ی نقاط واقع در طول ۸۵ درجه در غرب دایره‌ی عظیمه‌ی شمالی- جنوبی گذرنده از گرینویچ را متصل می‌کند) و همچنین مدارهای عرضی موازی را رسم می‌کنند. در این جا می‌توان از «دسته‌ی» نصف‌النهارها و «دسته‌ی» مدارها سخن گفت. گوس چنین اندیشید که برای مشخص کردن موقعیت نقطه‌ای روی هر سطحی که از نظر ریاضی معین است، روی آن سطح دو دسته منحنی به نام منجنی‌های p و منحنی‌های q رسم می‌کنیم. ضمناً ملاحظاتی به عمل می‌آوریم که با داشتن مختصات p و q متعلق به هر نقطه، جای آن دقیقاً مشخص شود.

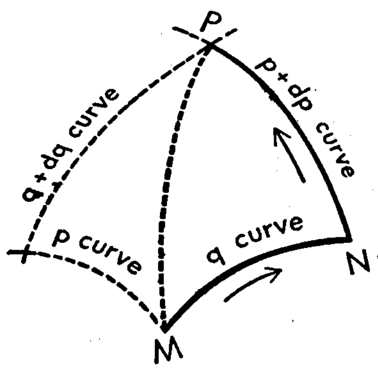
بصیرت عظیم گوس در همین جا تجلی یافت. اگر روی یك سطح کاملاً صاف، سه کیلومتر در یك جهت حرکت کنیم، سپس به سمت چپ بپیچیم و چهار کیلومتر در جهت عمود بر مسیر اخیر پیش برویم، با توجه به قضیه‌ی فیثاغورث می‌دانیم که فاصله‌ی نهایی ما از مبدأ حرکت، پنج کیلومتر خواهد بود. اما گوس چنین استدلال کرد که روی یك سطح منحنی- مثلاً سطح بیضوی یا زین اسبی یا هر چیز دیگر- فاصله‌ی نهایی برابر مقدار اخیر نخواهد شد.



شکل ۶ موقعیت هر نقطه روی سطحی که از نظر ریاضی مشخص است، با داشتن یك مختصه از دسته‌ی منحنی‌های p و یك مختصه از دسته‌ی منحنی‌های q که با یکدیگر متقاطعند، معین می‌شود. تنها روی سطح کروی، این منحنی‌ها بر یکدیگر عمودند.

اولاً، منحنی‌های p و منحنی‌های q همه‌جا یکدیگر را در زاویه‌ی قائمه قطع نمی‌کنند و این امر موجب افزایش جمله‌ی سومی به مجموع دو مجذور در معادلهٔ فیثاغورث ($a^2+b^2=c^2$)، می‌شود. ثانیاً، اگر دو دسته منحنی‌های مذکور را به صورت نوعی تور ماهیگیری که به طور محکم روی تمامی سطح کشیده شده، در نظر آوریم، هنگام رفتن از یك حوزه‌ی سطح به حوزه‌ای دیگر که انحنایش متفاوت است، زوایا و اضلاع خانه‌های کوچك، اندکی تغییر خواهد کرد.

گوس استدلال خود را به صورت یك معادله‌ی مشهور ریاضی بیان کرد. یك منحنی p و یك منحنی q از نقطهٔ مفروض M روی یك سطح منحنی، می‌گذرند. «شبه طول» p و «شبه عرض» q متعلق به نقطه‌ی M دارای مقادیر عددی معین هستند. می‌خواهیم از نقطه‌ی M به نقطه‌ی p در همسایگی آن، روی سطح برویم. ابتدا مقدار p را اندکی افزایش می‌دهیم، در حالی که مقدار q ثابت بماند. گوس نماد dp را برای اندك افزایش p به کار برد. بدین ترتیب به نقطهٔ N، با طول p+dp و عرض q می‌رسیم. سپس q را به مقدار اندك dq افزایش می‌دهیم، به طوری که p+dp ثابت بماند. حال به نقطه‌ی p، دارای طول p+dp رسیده ایم. می‌خواهیم فاصله نقطهٔ M تا نقطهٔ p را به دست آوریم. چون این فاصله بسیار کوچك است، آن را با نماد ds نشان می‌دهیم. گوس مربع



شکل ۷ روی سطحی که انحنا دارد، فاصله‌ی نقطه‌ی p از نقطه‌ی M را نمی‌توان از قانون فیثاغورث به‌دست آورد. گوس آن را به‌صورت تابعی از مختصات متقاطع مربوط به‌آن نقاط و انحنای سطح که از نقطه‌ای به‌نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند، تعریف کرد.

فاصله‌ی ds را به صورت مجموع سه جمله بیان کرد:

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

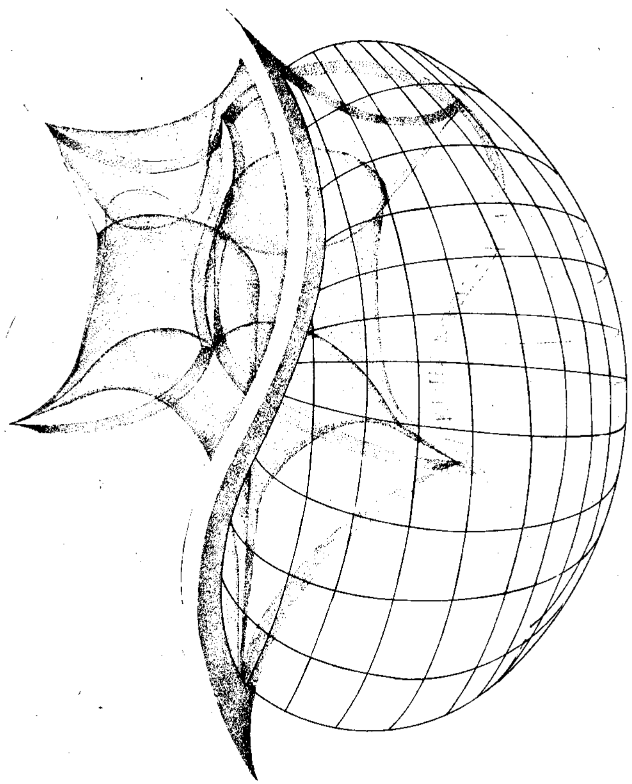
این معادله یکی از نقاط اوج تمامی ریاضیات و فیزیك است؛ قله ای که از فراز آن باید در برابر نبوغ گوس، سر تعظیم فرود آورد. اکنون دیگر برای رسیدن از معادله‌ی گوس به پهنه‌ی نسبیت عمومی بیش از دو گام دیگر باقی نمانده بود؛ یکی از این دو گام را ریمن و گام دیگر را اینشتین پیمود.

* * *

در هر نقطه‌ی M روی سطح مفروض، این معادله با قضیه‌ی اقلیدسی در مورد ضلع سوم هر مثلث، ds، و دو ضلع دیگر آن، dp و dq تفاوتی ندارد. اما نکته‌ی تازه در این جاست که گوس توابع E، F و G را مطرح ساخت که مقادیر عددیشان از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر روی سطح، به طور پیوسته تغییر می کند. گوس مشاهده کرد که هر یك از کمیت‌های E، F و G ـ تابعی از دو کمیت فرضی p و q ـ شبه طول و شبه عرض نقطه‌ی M ـ می باشد. روی يك صفحه می‌توانیم با ترسیم خطوط p و خطوط q، آن صفحه را به مربع‌های کوچك برابر ـ مانند صفحه‌ی شطرنج ـ تقسیم کنیم؛ در این صورت خواهیم داشت: $ds^2=dp^2+dq^2$، به طوری که همیشه در سراسر سطح، E برابر با يك، F برابر با صفر و G برابر با يك است. اما روی يك سطح منحنی، E، F و G به طریقی تغییر می کنند که تغییرات انحنای سطح را که موجب تمایز نقاط مختلف از یکدیگر می‌شود، به شیوه‌ای تجریدی ولی دقیق، نشان دهند.

در این مرحله، گوس قضیه‌ی مهم زیر را ثابت کرد که: انحنای سطح را در هر نقطه می‌توان با دانستن مقادیر E، F و G در آن نقطه، و نحوه‌ی تغییرات آن‌ها در همسایگی بلافصل نقطه‌ی مزبور، به دست آورد. چرا این قضیه بسیار مهم است؟ زیرا ساکنان يك سیاره‌ی خیالی که سراسر پوشیده از ابر است و

شکل دلخواه غیر کروی دارد، با دانستن این قضیه می‌توانند بدون دیدن ستارگان یا رفتن به نواحی دور از سیاره، همه‌ی اطلاعات ممکن را در مورد E، F و G به دست بیاورند. آن‌ها می‌توانند با اندازه‌گیری‌هایی که در روی خود سطح صورت می‌گیرد، انحنای سیاره‌شان را در نقاط مختلف محاسبه کنند و دریابند که آیا انحنای سطح فلان کشور، شبیه بخشی از پوسته‌ی تخم‌مرغ، یا زین اسب، یا تویی‌لاستیك اتومبیل است یا هر حالت دیگر.



ممکن است تصور کنید که پرداختن دانشمندان به چنین مطلبی یکسره بیهوده است. چرا باید ریاضی دانان توجه خود را به این مسئاله‌ی موهومی در مورد ساکنان سیاره ای خیالی معطوف کنند؟ این سؤال پاسخ بسیار خوبی دارد: **این ساکنان، خود ما هستیم.** برای روشن شدن موضوع، قدری توضیح لازم است.

* * *

تکه‌های کوچکی از کاغذ به اشکال نامنظم گوناگون را روی کره‌ای بزرگ و هموار، در نظر بگیرید. این تکه‌های کاغذ، زنده اند و حرکت می کنند. آن‌ها ساکنان سیاره‌ای خیالی هستند، ولی بدنشان حجم‌های محصور در سطوح نیست، بلکه سطوحی است که توسط منحنی‌هایی محصور شده است. این افراد که دارای بدن‌های کاملاً صاف و فاقد ضخامت هستند، نمی توانند هیچ تصوری درباره فضای بالا یا زیر خود، داشته باشند. آن‌ها خود موجوداتی دو بعدی و صرفاً بخش‌هایی از سطوح هستند. حواس آن‌ها طوری است که می تواند اطلاعاتی در مورد جهان دو بعدی پیرامونشان به آن‌ها بدهد. اما آن‌ها هیچ گونه تجربه‌ای در مورد هر آن‌چه بیرون این جهان واقع است، ندارند و بنابراین قادر به تجسم بعد سوم نیستند.

با این حال، آنان را موجوداتی هوشیار فرض می کنیم که ریاضیات و فیزیك را کشف کرده اند. هندسه‌ی آن‌ها شامل دو بخش است ـ هندسه‌ی خطی و هندسه‌ی مسطحه. در فیزیك، آن‌ها مسائل یك متغیره را به کمك نمودارهایی روی یك خط، و مسایل دو متغیره را توسط نمودارهای صفحه ای، نشان می‌دهند و مسائل دارای سه یا چهار متغیر یا بیش تر را به کمك جبر حل می کنند و از این بابت متأسف اند که چرا نمی توانند در حل این گونه مسائل از نمودار کمك بگیرند.

در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم (به حساب تقویم آن‌ها) در بسیاری از آنان اندیشه‌ی تازه ای پدیدار می‌شود. آن‌ها می گویند: «ما نمی توانیم بعد سوم را

تجسم کنیم، اما مسائل فیزیکی با سه متغیر y,x و z را حل می کنیم. پس چرا نتوانیم از فضای سه بعدی سخن بگوییم؟ حتی اگر نمی توانیم نقطه‌ها، خط ها و سطوح واقع در این فضا را تجسم کنیم، شاید مفید باشد که قادر به بحث درباره‌ی آن‌ها باشیم. شاید از این میان، سودی حاصل شود. در هر صورت، امتحانش ضرری ندارد.» و بدین ترتیب آن را امتحان کردند.

نیازی نیست که داستان را بیش از این ادامه دهیم؛ معنای آن به قدر کافی روشن است. ما درست مثل همین موجودات هستیم، فقط بدن ما سه بعدی است و در فضای سه بعدی حرکت می کنیم. هیچ یك از ما نمی تواند بعد چهارم را تجسم کند، با این حال مسائلی در مورد حرکت یك ذره در فضا حل می کنیم و این مسأله ای در چهار بعد است: y,x و z برای فضا و t برای زمان. هم چنین، مسائلی در مورد میدان‌های الکترومغناطیسی حل می‌کنیم. بردار میدان الکتریکی E در هر نقطه (x,y,z)، سه تصویر E_y,E_x و E_z دارد و در فضا و زمان تغییر می کند، بدین ترتیب، هفت متغیر به میان می آید. سه متغیر هم برای میدان مغناطیسی B وابسته به آن، مطرح می‌شود، پس روی هم رفته ده متغیر داریم. درست مثل این است که دانشمند ریاضی ـ فیزیك، با فضاهای چهار یا ده بعدی یا با هر تعداد بعد دیگر سر و کار داشته باشد.

* * *

ریمن در آغاز بحث خود، یك فضای n بعدی را که در آن n می تواند هر عدد دلخواهی باشد، فرض نمود. به نظر یك هندسه‌دان مبتدی، به سادگی می توان فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی مجاور را در این فضا تعریف کرد. مگر نه این که براساس قضیه‌ی فیثاغورث، در یك صفحه، مجذور فاصله، dx^2، برابر است با مجموع دو مجذور $ds^2=dx^2+dy^2$؟ پس به همین ترتیب، در یك فضای n- بعدی، ds^2 باید مجموع n مجذور، یعنی مجموع همه جملات نظیر dx^2 که موجودند، باشد. معمولا برای نشان دادن «مجموع جملات نظیر»، حرف یونانی

Σ (زیگما) به کار می رود. براین اساس، هندسه‌دان ساده اندیش خواهد نوشت: $ds^2=\Sigma dx^2$. اما بینش ریمن ژرف‌تر از این بود. او درباره‌ی یادداشت‌های سال ۱۸۲۷ استادش بسیار اندیشیده بود. وی چنین استدلال کرد که اگر بپذیریم $ds^2=\Sigma dx^2$، سنگ اول بنا را کج نهاده ایم، زیرا قضیه‌ی فیثاغورس تنها روی صفحه صادق است که می توان آن را مثل صفحه‌ی شطرنج به مربع‌های کوچك برابر، تقسیم کرد. در واقع آن چه باید تعمیم یابد، معادله‌ی گوس است که در مورد همه‌ی سطوح منحنی و از جمله صفحه ـ به عنوان یك حالت بسیار اختصاصی ـ صدق می کند. گوس دو چیز به فرمول فیثاغورث اضافه کرد: ۱) به مربعات dp و dq حاصل ضرب این دو مقدار، یعنی dpdq را افزود؛ ۲) برای هر یك از سه جمله، ضریبی در نظر گرفت و فرض کرد که این ضرایب E،F و G روی سطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می کنند.

اکنون همین کار را برای یك «فراسطح»[7] سه بعدی ـ بدون در نظر گرفتن ماهیت آن ـ انجام می‌دهیم. روی این فراسطح، سه دسته سطوح p و q و r ـ یا بنابه شیوه‌ی رایج، به نام‌های x_1،x_2 و x_3 ـ می کشیم. مربع فاصله‌ی بین دو نقطهٔ مجاور، ds^2، علاوه بر مجذورات dx_1 و dx_2 و dx_3، از روی حاصل ضرب‌های دو به دوی آن‌ها که به شکل سه جملهٔ dx_2dx_3، dx_3dx_1 و dx_1dx_2 هستند، به دست می‌آید. در این جا، شش جمله داریم، پس شش تا هم ضریب خواهیم داشت. این ضرایب را به g نشان می‌دهیم و اندیس‌های مناسبی به آن اضافه می کنیم. بنابراین، می توان نوشت:

$$ds^2=g_{11}dx_1^2+g_{22}dx_2^2+g_{33}dx_3^2+2g_{23}dx_2\,dx_3+2g_{31}dx_3dx_1+2g_{12}dx_1dx_2$$

. (ضریب ۲ غیر قابل چشم پوشی نیست و فقط از دیدگاه جبر به ظرافت معادله می افزاید. یك بار که یکی از استادان برلن بدون ملاحظه ضریب ۲ را

7. Supersurface

ds_2حذف کرد، این موضوع کاملاً به گوس برخورده بود.) پس شکل صحیح برای فراسطحی با سه بعد، به صورت فوق است و ضرایب شش گانه روی فراسطح، از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می کنند.

همان طور که گفتیم، ریمن در آغاز، وجود n متغیر ـ و نه سه یا چهار متغیر ـ را فرض نمود. وی نیاز داشت که برای موجودات هندسی که با آن‌ها سروکار دارد، نام‌هایی بیابد. او دو چیز را در نظر گرفت. اولاً، هر ذره (به طور نظری) می تواند آزادانه و به طور یکنواخت و پیوسته، روی یك خط یا یك منحنی، از نقطه ای به نقطه‌ی دیگر برود؛ ثانیاً، هنگامی که به مطالعه‌ی هندسه‌ی مسطحه می‌پردازیم، به چیزی جز اشکال واقع در صفحه نمی‌اندیشیم؛ به قول اهل منطق ، در این حالت، صفحه‌ی مزبور «جهان مورد بحث» ما را تشکیل می‌دهد. اما در مراحل بعد، زمانی که هندسه‌ی فضایی را مطالعه می کنیم، با صفحاتی در جهات مختلف فضا سروکار داریم. هر یك از این صفحه‌ها می تواند صفحهٔ هندسهٔ مسطحه ای باشد که قبلاً موضوع مطالعه‌ی ما بود. در هندسه‌ی مسطحه، به هیچ وجه مطرح نیست که این صفحه به طور مجزا وجود داشته باشد یا جزئی از یك فضای سه بعدی باشد.

ریمن با توجه به مجموعه‌ی این نکات، برای موجودات هندسی با هر بعد دلخواه که هر نقطه می تواند به طور پیوسته در آن حرکت کند، نام «پیوستار»[8] را برگزید. مثلاً، خط راست یك پیوستار یك بعدی است و ضمناً در هندسه‌ی نقاط و پاره خط های این خط، به هیچ روی مطرح نیست که این پیوستار یك بعدی، مستقلاً وجود دارد، یا جزئی از یك صفحه، یا فضای سه بعدی یا فضای با ابعاد بیش تر است. سطح کره یا زین اسب، همان طور که دیدیم، یك پیوستار دو بعدی است و در این جا نیز فرقی نمی کند که آن‌ها را به طور مجرد یا جزئی از یك فضا، با هر تعداد بعد در نظر بگیریم.

8. Continuun

فضایی که در آن به سر می‌بریم، یك پیوستار سه بعدی است. در این جا نیز باید ذکر کنیم که از نظر هندسه فضای ما هیچ فرقی ندارد که این فضا مستقلاً در نظر گرفته شود یا جزئی از یك فضای چهار، یا پنج یا هر چند بعدی، به‌حساب آید. تجسم مفهوم این گفته برای ما مقدور نیست. با این وجود، این مسیر را دنبال می‌کنیم تا ببینیم منطق ما را به‌کجا می‌برد.

* * *

افکار ریمن جوان در حوالی سال ۱۸۵۰ باید چنین بوده باشد. اکنون باید مختصراً شرح دهیم که او از این جا تا چه‌حد پیش رفت و محتوای عمده‌ی بحث او در سال ۱۸۵۴ چه بود.

در نخستین دور خواندن، چنین به‌نظر می‌رسد که نتیجه‌ی برجسته‌ی کوشش‌های ریمن، موفقیت در تعریف انحنای یك پیوستار دارای بیش از دو بعد، بوده است. پیوستار دو بعدی، صفحه است و دیدیم که انحنای آن برای حوزه‌ی کوچکی حول هر نقطه از سطح، توسط یك عدد بیان می‌شود (که برای سطح بیضوی مثبت و برای سطح زین اسبی منفی است). اگر انحنا در همه‌ی نقاط صفر باشد، آن سطح صفحه است و برعکس. ریمن ثابت کرد که مفهوم انحنا را می‌توان در مورد پیوستار n بعدی نیز تعمیم داد. اما در این حالت، دیگر یك عدد به‌تنهایی کافی نیست؛ برای بیان انحنای پیوستار سه‌بعدی، یك مجموعه‌ی سه عددی و برای پیوستار چهار بعدی، مجموعه‌ای از شش عدد لازم است و این موضوع به‌همین ترتیب ادامه می‌یابد. ریمن تنها به‌بیان این نتایج پرداخت و معقول بودن آن‌ها را از نظر ریاضی نشان داد؛ اثبات این مطالب و پرداختن مشروح به‌آن‌ها، مستلزم یاد داشت‌های طولانی یا سخن رانی‌های چند هفته‌ای بود.

اکنون دوباره به‌سر وقت همان موجودات کاملاً مسطحی که روی یك سطح بسیار بزرگ زندگی می‌کنند، می‌رویم. براساس «قضیه‌ی برجسته»

گوس، این ساکنان دو بعدی در جهان دو بعدیشان، اگر به‌اندازه‌ی کافی ریاضیات بدانند، می‌توانند انحنای هر ناحیه‌ی کوچکی از جهان خود را به‌دست آورند. آن‌ها چگونه می‌توانند سطح منحنی را تجسم کنند، در حالی که قادر به‌درك فضای سه بعدی نیستند؟ پاسخ ما، در واقع چیزی جز یادآوری قدرت شگفت‌انگیز ریاضیات نیست. این موجودات، لابد با مفهوم جاده‌ی منحنی ـ در مقابل جاده‌ی «مستقیم» که کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه است آشنا هستند. اگر در میان آنان نیز ریمنی پیدا شود که این مفهوم را، به‌شیوه‌ای کاملاً جبری، به‌صورت نظریه‌ی انحنای پیوستار n بعدی تعمیم دهد، نقشه برداران آن‌ها می‌توان به‌کمك فرمولی که ریمن در اختیار آن‌ها قرارمی‌دهد عددی را محاسبه کنند ـ که براساس مشاهدات‌شان ـ از کشوری به‌کشور دیگر، اندکی تغییر می‌کند. از این راه، آن‌ها می‌توانند انحنای جهان دو بعدیشان را اندازه کنند، بدون این که قادر به‌تجسم معنی آن باشند.

بی‌شك، وضعیت ما نیز نسبت به‌انحنای جهان خودمان، به‌همین منوال است و برای درك این که ریمن چگونه به‌تعریف آن نایل آمد، ناگزیریم به‌آثار وی مراجعه کنیم.

ریمن اظهار نظر کرد که اگر همه‌ی اعدادی که انحنای یك فضای n-بعدی را تعیین می‌کنند، صفر باشند، این فضا را صاف می‌نامیم زیرا برای سطحی که انحنایش صفر است، این واژه به‌کار می‌رود. حال اگر فضای سه‌بعدی را به‌مکعب‌های کوچك برابر تقسیم کنیم ـ همان طور که صفحه‌ی شطرنج به‌مربع‌های کوچك برابر تقسیم می‌شود ـ در این صورت ds^2 به‌سادگی برابر است با مجموع $dx^2+dy^2+dz^2$ که در آن dx، dy و dz نشان دهنده‌ی سه ضلع هر یك از مکعب‌های کوچك است. این فضا، یك فضای «صاف» است، هم چنان که صفحه، یك سطح صاف است. به‌عبارت دیگر، آن چه به‌ذهن ما خطور می‌کند این است که فضای مزبور ـ به‌معنای ریمنی کلمه ـ صاف است. آیا واقعاً چنین است؟ تنها چیزی که می‌توان انتظار داشت، این است که

بخش کوچکی از فضا که در حوالی ما قرار دارد صاف است. امکان هم دارد که فضا واقعاً نه تنها در نزدیکی ما بلکه حتی تا قلمرو دورترین سحابی‌های آسمان، صاف باشد. از سوی دیگر، به‌همین میزان احتمال دارد که فضا قدری انحنا داشته باشد. چگونه می‌توان به‌این مطلب پی برد؟ در پاسخ این سؤال ریمن چنین گفت: از راه تجربه. این همان پیام انقلابی است که او آرام ولی بسیار استوار، به‌جهان علم به‌ارمغان آورد.

اقلیدس و کانت به‌طور ناخود آگاه مفهوم ذهنی صاف بودن فضا را پذیرفته بودند. ریمن اعلام کرد که این قضیه را نمی‌توان بدون اثبات و به‌عنوان امری بدیهی، بیان نمود، بلکه تنها به‌صورت فرضیه‌ای است که باید از طریق تجربه به‌اثبات برسد. در آغاز، سه فرض را در مورد فضای اطراف خود می‌پذیریم، بدین عنوان که فضا دارای انحنای مثبت یکنواخت یا انحنای منفی یکنواخت است و یا آن که هیچ انحنایی ندارد (یعنی صاف، یا به‌اصطلاح مرسوم، اقلیدسی است). تحقیق این که کدام یك از این فرض‌ها درست است، برعهده‌ی اختر شناسان و فیزیك دانان است. این خلاصه‌ای بود از مفهوم مقاله‌ی پرابهام ریمن، تحت عنوان «فرض‌هایی که پایه‌ی هندسه را تشکیل می‌دهند.» این مقاله، کاملاً به‌حق، کنجکاوی گوس را برانگیخت.

* * *

در بحث ریمن، بسیار چیزهای مهم دیگر نیز وجود دارد، مثلاً ارزیابی بسیار روشن در مورد احتمال این که سرانجام نظریه‌ی کوانتومی فضا را بپذیریم؛ چیزی که در حال حاضر، فیزیك دانان محتاطانه به‌بررسی آن مشغولند. اما نکته‌ای که در این‌جا مطرح شد ـ یعنی توسل به‌تجربه برای کشف انحنای احتمالی فضا ـ به‌نظر ما مهم‌تر از همه است.

ریمن عاقلانه از پیشنهاد هر گونه آزمایش خاصی در این مورد، خودداری کرد. اگر از موضع مساعد فعلی که از دانش بعد از اینشتین برخورداریم،

به‌عقب نگاه کنیم، می‌بینیم که یافتن آن آزمایش‌ها بسیار دشوار بود. ممکن است تصور شود که این آزمایش‌ها در حوزه‌ی اخترشناسی کلاسیك قرار دارد و به‌اندازه‌گیری زوایای بین ستارگان مربوط می‌شود، اما این تصویر چندان صائب نیست. اینشتین ثابت کرد که پیوند عظیمی میان گرانش و ماده وجود دارد و فرض موقتی ریمن مبنی بر ثابت بودن انحنای فضا باید جای خود را به‌تغییرات موضعی بدهد (یعنی انحنا در همسایگی خورشید یا شعرای یمانی بیش‌تر از فضای تهی بین ستارگان است). وی هم‌چنین نشان داد که زمان هم باید به‌میان آورده شود؛ به‌عبارت دیگر، یك فضا ـ زمان چهار بعدی است که باید مورد آزمایش قرار گیرد. در سه آزمون تجربی هم که در سال ۱۹۲۰ از نظریه‌ی اینشتین به‌عمل آمد، دیده شد که فضا، زمان و گرانش به‌طور پایداری با یکدیگر در آمیخته‌اند.

ادعای ریمن مبنی براین که هندسه‌ی جهان صرفاً بخشی از فیزیك است که باید مثل هر بخش دیگر، از راه همکاری نزدیك نظریه و تجربه، پیش برده شود، بدین ترتیب کاملاً تحقق یافت. هم چنین است ایمانی که ریمن به‌استاد خود، گوس، داشت. هر چه بیش به‌دژهای عظیم اندیشه‌ی ریمن و اینشتین دقیق می‌شویم، با تحسین بیش‌تری پی می‌بریم که در آن فرمول کوچك و ناپذیرفتنی که گوس در سال ۱۸۲۷ بیان کرد، چه حقایق نادیدنی عظیمی نهفته بود.

✻

[a] را به معنای قسمت صحیح عدد a و {a} را به معنای قسمت دهدهی عدد a می‌گیریم، مثلاً

[۲/۴]=۲، {۲/۴}=۰/۴

حالا این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=\text{۱/۱} \\ y+[z]+\{x\}=\text{۲/۲} \\ z+[x]+\{y\}=\text{۳/۳} \end{cases}$$

حل در صفحهٔ ۷۹

حل دستگاه صفحهٔ ۵۱

با توجه بـه اتحاد $a=\{a\}+[a]$، اگرسه معادلهٔ دستگاه را جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$x+y+z=۳/۳ \qquad (۱)$$

مجموع دومعادلهٔ اول ودوم را ازمعادلهٔ (۱) کم می‌کنیم، خواهیم‌داشت:

$$[y]+\{x\}=۰$$

از آن‌جا به سادگی نتیجه می‌شود که x عددی درست است و $۰<y<۱$.

به این ترتیب معادلهٔ اول دستگاه به این صورت در می‌آید:

$$x+\{z\}=۱/۱$$

از آن‌جا $x=۱$ و $\{z\}=۰/۱$ می‌شود و معادلهٔ دوم دستگاه به صورت $y+[z]=۲/۲$ در می‌آید، و در نتیجه $[z]=۲$ و $y=۰/۲$ می‌شود.

جواب دستگاه چنین است:

$$x=۱، y=۰/۲، z=۲/۱$$