۲۸۲-۲۹۰

آشنائی با ریاضیات

جلد بیست و پنجم

آشنایی با ریاضیات (جلد بیست و پنجم)

گردآورنده: پرویز شهریاری

امور فنی: حسن نیک‌بخت

ناشر: انتشارات فردوس

تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

چاپ اول، آذرماه ۱۳۶۸

حروفچینی: مهدی

چاپ و صحافی: رامین

فهرست جلد بیست وپنجم

۴۵۰ ریال

تعمیم خاصیتی از دنبالهٔ فیبوناچی در دنباله‌های برگشتی

امیر دانشگر- محمد باقری

آقای شهریاری

سلام. مقاله‌ای که برایتان می‌فرستم مربوط به‌خاصیتی از دنباله‌های برگشتی است که آن را در سال ۶۳ در ایامی که به ناگزیر فراغتی درتنهایی دست داد «تا با درون درآیم و درخویش بنگرم» یافتم و بعدها آقای امیر دانشگر دانشجوی رشتهٔ برق دانشگاه صنعتی شریف که تا کنون ایشان‌را ندیده‌ام و تنها ازطریق نامه همکاری و همفکری کرده‌ایم اثبات و تعمیمی برای آن یافت که طی مکاتبه‌ای مداوم کاملتر و پرداخته‌تر شد و آقای دکتر **اسماعیل بابلیان** استاد ریاضی دانشگاه تربیت معلم هم که صورت قضیه به‌ایشان عرضه‌شده بود اثباتی برای قضیهٔ اول پیدا کردند که به‌خاطر مزایای آن در مقالهٔ حاضر به‌کار گرفته شده است.

با بهترین آرزوها ــ محمد باقری

مبحث دنباله‌های برگشتی، نظریهٔ نسبتاً مستقل و کاملی در ریاضیات به‌شمار می‌آید که درعین زیبایی و استحکام و امکانات زیاد، بامعلوماتی درحد ریاضیات دبیرستان می‌توان آن را دریافت.

مبانی این نظریه در دههٔ سوم قرن هیجدهم به‌وسیلهٔ آبراهام دوموآور (A.De Moivre) ریاضیدان فرانسوی و دانیل برنولی (D.Bernoulli) ریاضیدان سویسی انتشار یافت. لئونارد اولر ریاضیدان برجستهٔ روس نیز درنیمهٔ قرن هیجدهم نظریه‌ای فراگیر دربارهٔ دنباله‌های برگشتی منتشر کرد*.

*) در جلد سیزدهم کتابی که با عنوان «مقدمه بر آنالیز بینهایت کوچکها» نوشت (به‌سال ۱۷۴۸).

کارهای جدیدتر دراین‌زمینه به‌وسیلهٔ پ. ل. چبیشف و آ.آ. مارکوف صورت گرفته است.

*

دنبالهٔ برگشتی، دنباله‌ای است که هرجملهٔ آن ترکیبی خطی با ضریبهای ثابت از جمله‌های قبلی باشد. مثلاً دنبالهٔ

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

که به‌اختصار به‌صورت $\{a_n\}$ نوشته می‌شود، وقتی برگشتی است که داشته باشیم

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\dots+c_pa_{n-p} \qquad (1)$$

دراین تعریف c_iها ثابتند و p **مرتبهٔ** دنبالهٔ برگشتی خوانده می‌شود.

بااین تعریف پیداست که هرتصاعد هندسی، یك دنبالهٔ برگشتی مرتبهٔ اول است، زیرا درمورد جمله‌های آن می‌توان نوشت:

$$a_n=c_1a_{n-1}$$

که درآن c_1 قدر نسبت تصاعد هندسی است.

همچنین می‌توان ثابت کرد که هرتصاعد عددی یك دنبالهٔ برگشتی است. طبق تعریف تصاعد عددی، داریم:

$$a_n=a_{n-1}+d$$

که درآن d قدر نسبت تصاعد عددی است. بدیهی است که صورت فوق به‌علت وجود جملهٔ d ترکیب خطی به‌شمار نمی‌آید. برای رسیدن به این صورت، می‌نویسیم:

$$a_n=a_{n-1}+d$$
$$a_{n-1}=a_{n-2}+d$$

با کاهش دوطرف معادله‌ها از یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}$$

که درنتیجه:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

که صورت مطلوب است. پس می‌توان گفت که هرتصاعد عددی یك دنبالهٔ برگشتی مرتبهٔ دوم است.

*

یکی‌از ساده‌ترین ومعروف‌ترین دنباله‌های برگشتی، **دنبالهٔ فیبوناچی** است. فیبوناچی ملقب به لئوناردوی پیزایی، ریاضیدان ایتالیایی‌قرون میانه (حوالی ۱۱۷۰ میلادی) نویسندهٔ کتاب حساب «لیبرآباکی» است. وی ریاضیات و هندسه را از اهالی‌آسیای میانه و روم شرقی فراگرفت ودراروپا رواج داد. فیبوناچی یکی از مهم‌ترین حلقه‌های پیوندهندهٔ ریاضیات دورهٔ اسلامی و اروپای قرون میانه به‌شمار می‌آید.

دنبالهٔ فیبوناچی با رابطهٔ سادهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (a_1 = 1, a_2 = 1)$$

پس دنباله بااین جمله‌ها آغاز می‌شود:

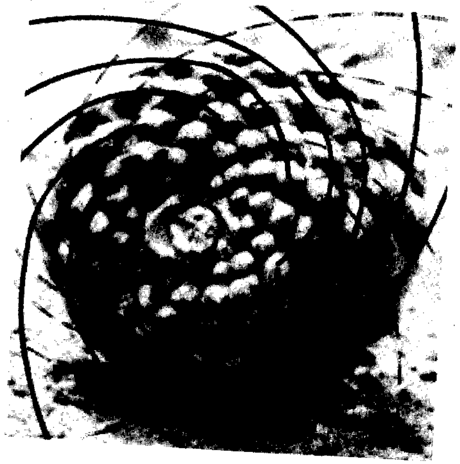
۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ...

این دنبالهٔ اعداد، علیرغم سادگی فوق‌العاده‌اش خواص متنوع وجالبی دارد و جاهای زیادی در طبیعت خودرا نشان می‌دهد. یکی از این موارد، تعداد ردیفهای مارپیچ‌واری‌که دانه‌های گل‌آفتابگردان روی صفحهٔ دایره شکل‌آن در دو جهت مختلف پدید می‌آورند، یا تعداد ردیفهای مارپیچ‌وار برگه‌های میوهٔ کاج در دوجهت مختلف است. اگر در یك مورد تعداد پیچهای موجود در دوجهت را بشمارید، دوعدد متفاوت خواهید یافت که دقیقاً دوجملهٔ پیاپی از دنبالهٔ فیبوناچی هستند (مثلاً ۱۳ و ۲۱ یا ۲۱ و ۳۴ یا ۳۴ و ۵۵).

یکی‌از خاصیتهای جالب دنبالهٔ فیبوناچی است‌که درآن

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}$$

مثلاً:



درمیوهٔ کاج تعداد مارپیچهای‌چپ گرد (خطوط پر) ۸ وتعداد مارپیچهای راست‌گرد (خطچین)۱۳ است.

عکس از: شیرین حکمی

$$a_5^2 + a_6^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89 = a_{11}$$

این خاصیت امکان می‌دهد که جمله‌های دوردست این دنباله را بدون نیاز به محاسبهٔ یکایك جمله‌های قبلی به دست آوریم. اکنون می‌خواهیم تعمیمی برای این خاصیت در دنباله‌های برگشتی مرتبهٔ p بیان کنیم.

*

ازآنجا که هر جمله با توجه با p جملهٔ قبلی محاسبه می‌شود، لازم می‌آیدکه بردار $(a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-p+1})$ به‌عنوان بردار **پیشینه** تعریف شود. دنبالهٔ برگشتی با بردار پیشینهٔ $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ را دنبالهٔ **بهنجار** می‌نامیم.

قضیهٔ ۱: در هر دنبالهٔ برگشتی بهنجار، به‌ازای هر i و j متعلق به $\mathbb{N}$ می‌توان نوشت:

$$a_{i+j} = A_i G A_j^t \qquad (2)$$

که درآن:

$$A_i=(a_i,\ a_{i-1},\ \ldots,\ a_{i-p+1})$$

و ماتریس G که $p\times p$ است به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{p-1} & c_p \\ 0 & c_3 & c_4 & \cdots & c_p & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{p-1} & c_p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که در رابطهٔ (۲) حرف t علامت **ترانهاد** است.

برهان*: بافرض ثابت‌بودن i و با استقرا روی j داریم:

$$A_iGA_1^t=A_iG(a_1,\ a_0,\ a_{-1},\ \ldots,\ a_{2-p})^t=$$

$$=A_iG(c_1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)^t=$$

$$=A_i(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_p)^t=a_{i+1}$$

اکنون با این فرض که رابطهٔ (۲) به‌ازای $1\leqslant j\leqslant J$ درست باشد می‌توان نوشت:

$$a_{i+J+1}=c_1a_{i+J}+c_2a_{i+J-1}+\ldots+c_pa_{i+J-p+1}=$$

$$=c_1A_iGA_J^t+c_2A_iGA_{J-1}^t+\ldots+c_pA_iGA_{J-p+1}^t=$$

*) این برهان اساساً از اثباتی که آقای دکتر اسماعیل بابلیان طی نامه‌ای برای نویسندگان مقالهٔ حاضر فرستاده‌اند و از اثباتی کــه نویسندگان این مقاله یافته‌بودند سرراست‌تر و کوتاهتر بود، گرفته شده است.

$$=A_iG\Big(\sum_{k=1}^{p} c_kA^t_{J-k+1}\Big)=$$

$$=A_iG\Big(\sum_{k=1}^{p} c_ka_{J-k+1},\ \sum_{k=1}^{p} c_ka_{J-k},\ \ldots,\ \sum_{k=1}^{p} c_ka_{J-k-p+2}\Big)^t=$$

$$=A_iG(a_{J+1},\ a_J,\ \ldots,\ a_{J-p+2})^t=$$

$$=A_iGA^t_{J+1}$$

و به‌این‌ترتیب برهان قضیهٔ ۱ کامل می‌شود.

*

قضیهٔ۲: در دنبالهٔ برگشتی مرتبهٔ p با بردار پیشینهٔ $(a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-p+1})$ به‌ازای هر i و j متعلق به $\mathbb{N}$ می‌توان نوشت:

$$a_{i+j}=N_iGA_j^t=A_iGN_j^t \qquad (۳)$$

که درآن $N_i=(n_i,\ n_{i-1},\ \ldots,\ n_{i-p+1})$ و n_iها جمله‌های دنبالهٔ بهنجاری باهمان ضریبهای (c_i) هستند.

برهان: به‌روشنی می‌تــوان نشان داد کــه هرجمله از دنبالهٔ فوق را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از جمله‌های دنبالهٔ بهنجار نوشت:

$$a_i=k_1n_i+k_2n_{i-1}+\ldots+k_pn_{i-p+1}$$

که درآن:

$$k_1=a_{-p+1}$$

$$k_2=a_{-p+2}-n_1a_{-p+1}$$

$$k_3=a_{-p+3}-n_1a_{-p+2}-n_2a_{-p+1}$$

$$\vdots$$

$$k_p=a_0-n_1a_1-n_2a_2-\ldots-n_{p-1}a_{-p+1}$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} a_{i+j}&=k_1n_{i+j}+k_2n_{i+j-1}+\dots+k_pn_{i+j-p+1}=\\ &=k_1N_iGN_j^t+k_2N_iGN_{j-1}^t+\dots+k_pN_iGN_{j-p+1}^t=\\ &=N_iG(k_1N_j^t+k_2N_{j-1}^t+\dots+k_pN_{j-p+1}^t)=\\ &=N_iGA_j^t \end{aligned}$$

به‌این ترتیب حکم ثابت می‌شود وچون رابطهٔ (۳) نسبت به i و j متقارن است، داریم:

$$a_{i+j}=N_iGA_j^t=A_iGN_j^t$$

*

کاربرد:

با استفاده از قضیهٔ (۱) و قضیهٔ (۲) کـه تعمیم آن است مـی‌تـوان جمله‌هـای دوردست دنباله‌هـای برگشتی مرتبهٔ p را بدون نیاز به محاسبهٔ یکایك جمله‌های قبلی‌آنها به‌روش سریعی به‌دست آورد.

ازاین خاصیت می‌توان در روش برنولی برای یافتن ریشهٔ معادله‌های چندجمله‌ای استفاده‌کـرد. در روش برنولی از دنبالهٔ برگشتی با رابطهٔ (۱) برای یافتن جواب معادلهٔ چندجمله‌ای زیر استفاده می‌شود:

$$x^p=c_1x^{p-1}+c_2x^{p-2}+\dots+c_{p-1}x+c_p$$

ثابت می‌شودکه اگر این معادله p ریشهٔ مجزا به‌صورت $(z_1, z_2, \dots, z_p)$ داشته باشد و

$$0<|z_1|<|z_2|<\dots<|z_p|$$

آنگاه $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ مقداری تقریبی برای z_p به دست خواهد داد و با زیاد شدن n مقدار این‌کسر به‌سوی z_p میل خواهدکرد. معمولاً برای سهولت دراین‌کار از دنبالهٔ بهنجار استفاده می‌کنند.

*

مثال۱: در دنبالهٔ برگشتی بهنجار با رابطهٔ

$$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}-4a_{n-3}+a_{n-4}$$

جمله‌های اول تا ششم را مستقیماً محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n_0&=1\\ n_1&=2\\ n_2&=2\times2+3\times1=7\\ n_3&=2\times7+3\times2-4\times1=16\\ n_4&=2\times16+3\times7-4\times2+1=46\\ n_5&=2\times46+3\times16-4\times7+2=114\\ n_6&=2\times114+3\times46-4\times16+7=309 \end{aligned}$$

اکنون برای محاسبهٔ n_{12} می‌توان مستقیماً اقدام کرد:

$$n_{12}=N_6GN_6^t=(309, 114, 46, 16)\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&3&-4&1\\0&-4&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}309\\114\\46\\16\end{pmatrix}=$$

$$\begin{aligned} &=(309, 174, -410, 114)(309, 114, 46, 16)^t=\\ &=309\times309+174\times114-410\times46+114\times16=\\ &=98281 \end{aligned}$$

اگر به‌روش مستقیم بامحاسبهٔ یکایك جمله‌ها پیش برویم، همین مقدار برای a_{12} به‌دست می‌آید.

مثال۲: در دنبالهٔ برگشتی باهمـان رابطـهٔ مثال ۱ وبا بردار پیشینهٔ

(۲ ، ۳ ، ۵ ، ۲) مـی‌خواهیم $a_{۱۲}$ را حساب کنیم. محاسبهٔ مستقیم $a_۱$ تا $a_۶$ چنین است:

$$a_۱ = ۲\times ۲ + ۳\times ۵ - ۴\times ۱۲ + ۲ = ۹$$

$$a_۲ = ۲\times ۹ + ۳\times ۲ - ۴\times ۵ + ۳ = ۷$$

$$a_۳ = ۲\times ۷ + ۳\times ۹ - ۴\times ۲ + ۵ = ۳۸$$

$$a_۴ = ۲\times ۳۸ + ۳\times ۷ - ۴\times ۹ + ۲ = ۲۱$$

$$a_۵ = ۲\times ۲۱ + ۳\times ۳۸ - ۴\times ۷ + ۹ = ۱۳۷$$

$$a_۶ = ۲\times ۱۳۷ + ۳\times ۲۱ - ۴\times ۳۸ + ۷ = ۱۹۲$$

اکنون بااستفاده از قضیهٔ (۲) می‌توان نوشت:

$$a_{۱۲} = N_۶ G A_۶^t$$

ماتریس $N_۶ G$ را قبلاً محاسبه کرده‌ایم:

$$N_۶ G = (۳۰۹ ، ۱۷۴ ، -۴۱۰ ، ۱۱۴)$$

$$a_{۱۲} = (۳۰۹ ، ۱۷۴ ، -۴۱۰ ، ۱۱۴)(۱۹۲ ، ۱۳۷ ، ۲۱ ، ۳۸)^t =$$

$$= ۳۰۹\times ۱۹۲ + ۱۷۴\times ۱۳۷ - ۴۱۰\times ۲۱ + ۱۱۴\times ۳۸ = ۷۸۸۸۸$$

محاسبهٔ جمله‌های پیاپی برای یافتن $a_{۱۲}$ نیز به‌همین نتیجه منجر خواهد شد.

منابع:

1. Combinatorial theory; Marshall Hall Jr. Copyright 1986. John Wiley & Sons Inc.
2. Computational mathematics; B. R. Demidovich, I. A. Maron; Mir publishers, Moscow.
3. Constructive aspects of the fundamantal theorem of algebra; edited by Bruno Dejon, Peter Henrici; Copyright 1966, John Wiley & Sons Ltd.
4. Applied and Computational Complex analysis, Vol. 1; by Peter Henrici; Copyright 1974, John Wiley & Sons Inc.
5. Recursion Sequences; A. I. Markushevich; Mir Publishers, Moscow; 1975.