آشتی با ریاضیات

۳

مرداد ۱۳۶۱

دورهٔ دوم

آشتی با ریاضیات

سردبیر : پرویز شهریاری

نشریهٔ دو ماهه. هرسال ۶ شماره منتشر می‌شود. بهای اشتراک سالیانه ۷۲۰ ریال

تیراژ ۴۰۰۰ نسخه ــ چاپخانهٔ رامین

نشانی پستی : تهران ـ صندوق پستی ۵۴۱-۳۴

سال‌ششم ـ شمارهٔ ۳ (شماره ردیف ۲۳)

فهرست مطالب

پول اشتراك و کمك‌های خود را به‌حساب ۱۷۶۰ بانك تجارت (بازرگانی سابق) تهران ـ چهارراه ولی‌عصر، جنب بزرگمهر (کد بانکی ۵۵۰۰۴۶) به‌نام سردبیر بفرستید و فتوکپی رسید آن را همراه با نشانی کامل خود برای ما بفرستید.

۱۲۰ ریال

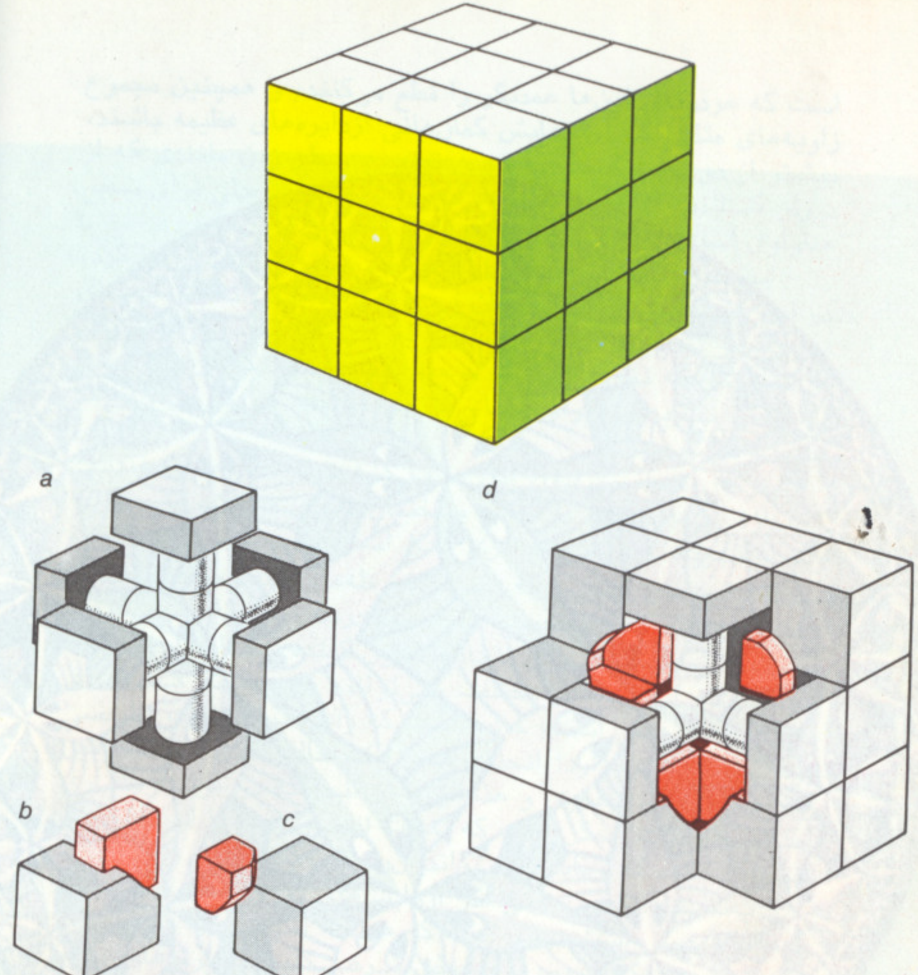
بررسی مکعب روبیك به‌کمك ریاضیات

دوگلاس ر. هوفشتاتر
ترجمهٔ محمد باقری

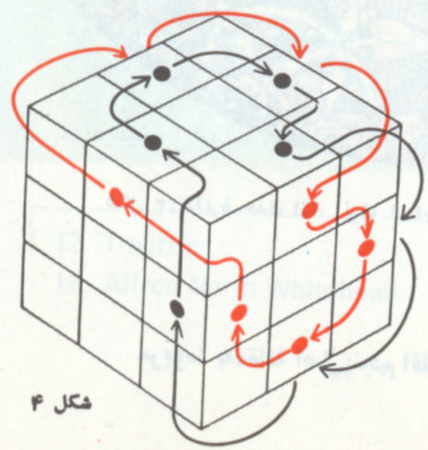
مکعب جادویی که مکعب روبیك نیز نامیده‌می‌شود، به‌یکباره سراسر دنیای معما، ریاضیات ومحاسبات کامپیوتری را تسخیر کرده‌است. به‌ندرت معمایی اذهان این‌همه افراد را به خود متوجه ساخته است.

مکعب جادویی چیزی فراتر از یك‌معماست. زمان پیدایش این‌مکعب چندان دور نیست. فکر ساختن چنین ابزاری به‌طور همزمان درمجارستان، ژاپن و احتمالاً جایی دیگر پیدا شد. اخیراً گزارشی از یك کارمند فرانسوی پیدا شده است حاکی از خاطرهٔ وی در مورد اینکه چنین مکعبی را که از چوب ساخته شده بود، در سال ۱۹۲۰ در استانبول و سپس دوباره درسال ۱۹۳۵ درمارسی دیده است. البته این‌روایت هنوز تأیید نشده ومورد تردید است. در هر صورت، کار روبیك در سال ۱۹۷۵ تکمیل و ثبت گردید. مستقل از وی، یك مهندس تجربی ژاپنی به‌نام تروتوشی‌ایشیگه که‌صاحب یك کارگاه فلزکاری کوچك درحوالی توکیوست، با فاصلهٔ یك سال پس از روبیك همان طرح را یافت وآن را در سال ۱۹۷۶ در ژاپن به‌ثبت رساند. به هرحال، سهمی از این افتخار نیز از آن ایشیگه است.

ارنو روبیك مدرس آموزشگاه هنرهای حرفه‌ای در بوداپست است. وی هنگام جستجو برای یافتن وسیله‌ای که بتواند به‌کمك آن شاگردانش را با تجسم اشیای سه بعدی‌آشنا سازد، به‌فکر یك مکعب ۳×۳×۳ افتاد که هر یك از شش وجه ۳×۳ آن بتوانند حول مرکز خود بچرخند و بااین حال کل مکعب متصل باقی بماند. در آغاز هر وجه به رنگی درآورده می‌شود و چرخش‌های پی در پی وجوه مختلف، رنگ‌ها را مخلوط می‌کند.



شکل ۱



شکل ۴

شکل ۲

مربوط به مقالهٔ بررسی مکعب‌های روبیک به‌کمک ریاضیات

آنگاه از شاگردان خواسته می‌شود که مکعب را به وضعیت نخست باز گردانند.

برای کسی که برای نخستین‌بار توصیف چنین مکعبی را می‌شنود، پذیرفتن امکان عملی وجود چنین چیزی دشوار است. به نظر می‌رسد که چنین مکعبی باید به‌صورت مکعب‌های کوچکتری از هم بپاشد. مثلاً یکی از مکعب‌های کوچك را که در کنجیِ از مکعب جادویی قرار گرفته است، در نظر بگیرید. این مکعب کوچك به‌کجا وصل است؟ با تجسم چرخش هر سه وجهی که این مکعب کوچك را شامل می‌شود، می‌بینیم کـه مکعب کوچك مورد نظر به هیچ‌یك از سه مکعب کوچك میان‌یالی که با آن هم‌جوارند متصل نیست. پس چگونه درجای خود باقی می‌ماند؟ برخی افراد دراین مورد، استفاده از آهن‌ربا یا کش لاستیکی یا مفتول‌های تو در تو را در داخل مکعب مطرح می‌سازند، اما طرح اصلی بسیار ساده است و از این وسایل درآن به‌کار نمی‌رود.

عملاً مکعب جادویی را می‌توان ظرف چند ثانیه از هم باز کرد و ساختمان داخلی‌آن به‌قدری ساده است که به‌راحتی می‌توان به‌طرز کارآن پی برد. در مکعب جادویی سه نوع مکعب کوچك وجود دارد: شش مکعب میانِ وجهی (میانی)، ۱۲ مکعب میان یالی (یالی) و هشت مکعب کنجی (کنجی). میانی‌ها فقط یك «وجه‌آزاد»، یالی‌ها دو وجه آزاد و کنجی‌ها سه وجه‌آزاد دارند. به‌علاوه، شش مکعب کوچك میانی در واقع مکعب نیستند بلکه وجوهی هستندکه توسطسه محور متعامد، که یکدیگر را در وسط قطع می‌کنند، به هم متصلند. بقیهٔ مکعب‌های کوچك، مکعب‌های نسبتاً کاملی هستند، بااین تفاوت‌که هرکدام «پاشنهٔ»کوچکی به‌طرف‌مرکزمکعب‌جادویی و نیز تو رفتگی‌هایی دارند (شکل۱).

راز اصلی دراین است که مکعب‌های کوچك به کمك همین پاشنه‌ها متقابلاً یکدیگر را نگاه می‌دارند، بی‌آنکه هیچ‌کدام به‌دیگری متصل‌باشند. یالی‌ها، کنجی‌ها را نگاه می‌دارند و کنجی‌ها، یالی‌ها را. میانی‌ها، استخوان‌بندی مکعب روبیك را تشکیل می‌دهند. هر لایه، مثلاً لایهٔ بالایی، هنگام چرخش به‌طور افقی، یکپارچه باقی می‌ماند و توسط مکعب میانی خود و

به‌کمك لایهٔ افقی زیرین‌خود، موقعیت عمودی خویش را حفظ می‌کند. لایهٔ وسطی دارای یك حفرهٔ استوانه‌ای در داخل است که براثر تو رفتگی‌های مکعب‌های‌کوچك ایجاد شده است وحرکت پاشنه‌های لایهٔ بالایی را هدایت می‌کند و باعث یکپارچه ماندن لایهٔ بالایی می‌شود. شاید بتوان گفت که یافتن ساختمان مکانیکی مکعب جادویی به مراتب دشوارتر از حل مسئلهٔ برگرداندن رنگ‌های درهم ریخته به حالت نخست است.

نکتهٔ مهمی‌که اغلب افراد ابتدا بدان توجه نمی‌کنند، این است که بازگرداندن مکعب جادویی درهم‌ریخته به‌وضعیت اولیه (که هر وجه تماماً به‌یك رنگ باشد) به قدری دشوار است‌که حتماً باید از یك روش‌کلی بهره جست. هیچ‌کس نمی‌تواند مکعب جادویی در هم‌ریخته را از روش سعی و خطا، به‌حالت اولیه برگرداند.

اکنون به‌محاسبهٔ تعداد کل‌حالات ممکن مکعب جادویی می‌پردازیم. در هشت‌کنج مکعب جادویی، هشت مکعب کوچك‌کنجی قرار گرفته‌اندکه ضمن حرکات متوالی، با یکدیگر جا عوض می‌کنند. اگر مکعب‌های کنجی را از یك تا هشت شماره‌گذاری کنیم، برای‌کنجی اول هشت امکان، برای کنجی دوم هفت‌امکان، برای سومی شش امکان وجود دارد، الی‌آخر. بنابر‌این، تعداد حالات ممکن قرار گرفتن مکعب‌های‌کنجی $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8=8!$ است. هر کنج می‌تواند یکی از سه‌جهت فضایی ممکن را اختیار کند، پس یك ضریب 3^8 نیز افزوده مـی‌شود. در مورد مکعب‌های کوچك میان یالی هم وضع مشابهی وجود دارد. این دوازده مکعب‌یالی به $12!$ صورت ممکن، در دوازده موضع‌مربوطه جای می‌گیرند. هر یك از مکعب‌های یالی، می‌توانند یکی از دو جهت فضایی ممکن را اختیار کنند. پس ضریب 2^{12} نیز به میان می‌آید. مکعب‌های میان وجهی موضع ثابتی دارند (مگر آنکه‌کل مکعب جادویی چرخانده شود) بنابراین در این شمارش تأثیری ندارند. اگر اعداد فوق را درهم ضرب کنیم، تعداد حالت‌ها برابر ۵۱۹،۰۲۴،۰۳۹،۲۹۳،۸۷۸،۲۷۲،۰۰۰ می‌شودکه حدوداً مساوی 5×10^{20} است.

اما دراینجا فرض‌کردیم‌که هرمکعب کوچك مستقل ازسایرمکعب‌های

کوچك می‌تواند هریك ازمواضع ممکن‌را باهرجهت فضایی‌ممکن اختیار کند. چنانکه‌خواهیم‌دید، اوضاع کاملاً بدین‌قرارنیست. درمورد‌جهت‌فضایی‌مکعب‌های کنجی‌محدودیتی‌وجود دارد: هرهفت‌مکعب کنجی می‌توانندجهت فضایی دلخواه‌داشته باشند، اماجهت فضایی‌مکعب کنجی‌هشتم‌اجباری است،پس‌یك ضریب ۳ حذف می‌شود. محدودیت مشابهی برای مکعب‌های یالی وجود دارد: از دوازده مکعب یالی، یازده‌تایشان می‌توانند جهت فضایی دلخواه داشته باشند، اماجهت فضایی دوازدهمی خود به‌خود تعیین می‌شود؛ بدین ترتیب یك ضریب ۲ هم حذف می‌گردد. آخرین محدودیت درمورد موضع مکعب‌های کوچك (بدون توجه به‌جهت فضایی‌آن‌ها) است که برطبق‌آن، همهٔ مکعب‌های کوچك، جز دوتایشان، می‌توانند مواضع دلخواه اختیار کنند، اما موضع دو مکعب آخر اجباراً معین می‌شود. این محدودیت هم یك ضریب ۲ را کنار می‌گذارد وکلاً محاسبهٔ فوق با یك‌ضریب ۱۲ کاهش می‌یابد و به ۴۳،۲۵۲،۰۰۳،۲۷۴،۴۸۹،۸۵۶،۰۰۰ که حدوداً برابر 4×10^{19} حالت مختلف است، تبدیل می‌شود.

از راه دیگری هم می‌توان این ضریب ۱۲ را بیان‌کرد، بدین‌ترتیب که وقتی مکعبی را در وضعیت اولیه به‌دست می‌گیرید، با یکی از دوازده حالت «بدیهی» مواجه هستید، اما اگر مکعب را از هم بازکنید و دوباره قطعات آن را طوری سوار کنید که تفاوتش با مکعب اولیه ، چرخش یکی از مکعب‌های کوچك‌کنجی به‌اندازهٔ ۱۲۰ درجه باشد، به‌حالتی دست می‌یابید که در وضعیت قبلی رسیدن به آن نامکن بود. از این حالت می‌توان به‌گروه حالت جدیدی که تعدادشان کلاً همان حدود 4×10^{19} است دست یافت. مکعب جادویی دارای ۱۲گروه از نوع مذکور است‌که هیچ فصل مشترکی با هم ندارند.

چرخش‌های ناممکنی که در اینجا مطرح می‌شود، همانند جالبی در در فیزیك ذره‌ای دارد. هرگز نمی‌توان یك رشته حرکت در مکعب انجام داد به‌طوری‌که در پایان کار فقط یك مکعب کنجی به‌اندازهٔ یك‌سوم دور کامل چرخیده باشد و بقیه در جاهای اولیه‌شان مانده باشند. این موضوع یادآور ذرهٔ بنیادی فرضی مشهوری است که دارای بار $+\frac{1}{3}$ است و ضدذرهٔ

مربوط به‌آن، بار $-\frac{1}{3}$ دارد. چرخش یك سوم دور درجهت حرکت عقربه‌های ساعت را نظیر کوارك وچرخش یك‌سوم دور درخلاف جهت عقربه‌های ساعت را نظیر ضد کوارك فرض کرده‌اند. معلوم شده است که کوارك‌ها مانند همنام‌های خود درمکعب جادویی غیرقابل دسترسی هستند و بسیاری ازدانشمندان فیزیك‌نظری اکنون برآنندکه وجود یك کوارك (یاضدکوارك) مجزا به‌طور آزاد امکان‌ناپذیر است.

عملاً ارتباط مذکور ژرفتر از این‌هاست. ذرات کوارك نمی‌توانند به‌طور آزاد موجود باشند اما می‌توانند درگروه‌هایی به‌طور پیوسته به‌یك‌دیگر وجود داشته باشند. زوجی از یك کوارك و یك ضد کوارك تشکیل یك مزون می‌دهند و سه کوارك با هم یك باریون پدید می‌آورند که‌بارش عددی صحیح است (مثلاً پروتون‌که بارش ۱+ است). جای شگفتی‌است که در مکعب جادویی نیز می‌توان طوری حرکات را انجام‌داد که تنها دو مکعب کوچك کنجی، هر یك به اندازهٔ یك‌سوم دور چرخش کنند، مشروط به اینکه جهت چرخش آن‌ها مخالف هم باشد (یکی درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت ودیگری خلاف‌آن). همچنین می‌توان سه‌مکعب کوچك‌کنجی را، هر یك به‌اندازهٔ یك سوم دور، چرخش داد به‌شرطی‌که هر سه چرخش جهت یکسان داشته باشند. حالتی را که دو مکعب کنجی در جهت‌های خلاف هم چرخیده‌اند، مزون و حالتی را که سه مکعب کنجی در جهت یکسان چرخیده‌اند، باریون نامیده‌اند. در دنیای ذرات، تنها ترکیباتی از کوارك‌ها که بارشان عددی صحیح باشد ، می‌توانند وجود داشته باشند . در جهان مکعب جادویی نیز فقط ترکیباتی از کوارك‌ها که مقدار چرخش آن‌ها عددی صحیح باشد ، امکان‌پذیر است . از این طریق نیز می‌توان نشان دادکه جهت هشتمین مکعب کنجی اجباراً توسط هفت مکعب کنجی اولیه تعیین می‌گردد . در دنیای مکعب جادویی ، دلیل اساسی وجود این محدودیت برای‌کوارك‌ها به‌نظریهٔ گروه‌ها مربوط است. شاید برای‌این محدودیت، در ذرات کوارك نیز توضیح مشابهی مبتنی بر نظریهٔ گروه‌ها موجود باشد. این سؤالی است که دیگران باید پاسخ آن‌را بیابند ولی بهر-

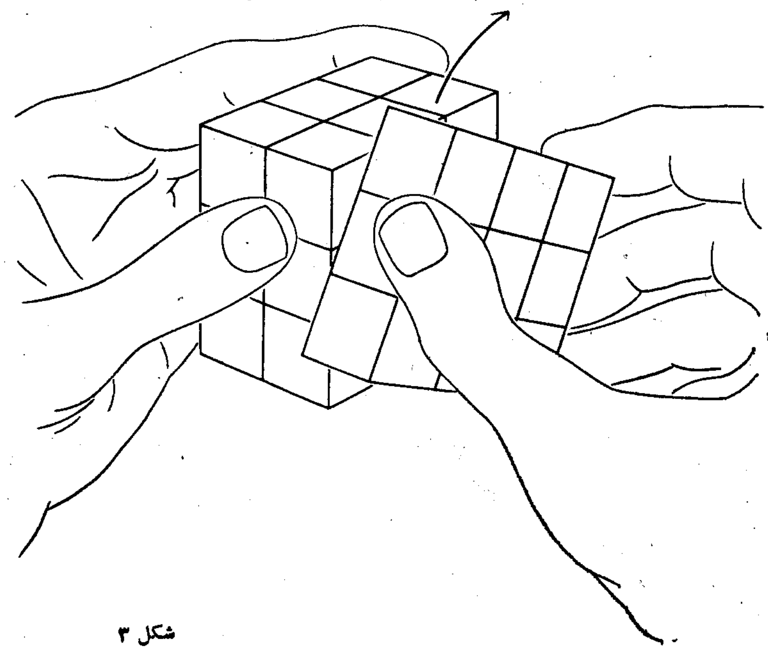
حال وجود چنین تشابهی جالب توجه وکنجکاوی برانگیز است.

اگر مکعب جادویی درحالت اولیه باشد (یعنی هر وجه آن تنها به یك رنگ باشد) کدام سلسله حرکت‌ها می‌تواند یك مزون یا یك باریون تشکیل دهد؟ دراینجا با یکی ازمهم‌ترین موضوع‌ها در بررسی نظری‌مکعب جادویی روبرو هستیم: موضوع سلسله حرکت‌های مشخص‌که وضعیت چند مکعب کوچك مورد نظر را تغییر می‌دهند بی‌آنکه تغییری در وضعیت سایر مکعب‌های کوچك پدید آید (یا به‌قول صاحب‌نظران نظریهٔ گروه‌ها، سایر مکعب‌های کوچك «پایا» باشند) با توجه به همانندی موجود، در بررسی حرکات و وضعیت‌های مکعب‌جادویی، اصطلاحاتی ازنظریهٔ‌گروه‌ها وعلوم کامپیوتر اخذ می‌گردد.

برای بیان دقیق‌حالات وحرکات، ناگزیر باید به‌قراردادهایی متوسل شویم. ابتدا باید وجوه مکعب‌را نامگذاری‌کنیم. یك راه ممکن‌این‌است‌که هروجه را با توجه به‌رنگ‌آن بنامیم، حتی پس ازآنکه ترتیب مکعب‌های کوچك با رنگ‌های مختلف به‌هم‌بخورد. شاید تصور شود پس از آنکه‌مثلاً رنگ سفید در وجوه‌مختلف پراکنده شد دیگر سخن‌گفتن از وجه سفید بی‌معنی باشد. اما به یاد داشته باشید که وضعیت مکعب‌های کوچك میانی طی حرکت‌های‌گوناگون، نسبت به‌هم ثابت می‌ماند و دراین‌صورت منظور از وجه سفید (به‌عنوان مثال) وجهی خواهد بود که مکعب میانی آن‌سفید باشد. پس چرا وجوه را براساس رنگ نامگذاری نکنیم؟ مسئله این است‌که موقعیت متقابل رنگ‌ها در مکعب‌های مختلف یکسان نیست. حتی ممکن است دو مکعب، که در یك کارخانه ساخته می‌شوند، حالات شروع ناهمانندی داشته باشند. یك قرارداد کلی‌تر بدین صورت است که وجوه را با نام‌های «چپ» و «راست»، «جلو» و «پشت» و «رو» و «زیر» مشخص کنیم. برای اختصار این وجوه را به ترتیب با حروف L،R،F،B،U و D می‌نامیم که حروف اول کلمات مزبور در زبان‌انگلیسی هستند. هر مکعب‌کوچك را می‌توانیم با ذکر وجوهی‌که شامل این‌مکعب کوچك‌هستند (با استفاده از حروف‌کوچك الفبای انگلیسی) مشخص‌سازیم. بدین‌ترتیب، ur (یا ru) نشانهٔ مکعب کوچك یالی، واقع درکنارهٔ راست

لایه بالایی و urf نشانهٔ مکعب کوچك کُنجی واقع در جلوی آن است (شکل۲).

ساده‌ترین حرکت روی مکعب این است که وجه راست را در دست راست و با فشار انگشت شست به‌طرف جلو بچرخانیم. اگر از سمت‌راست به‌این حرکت نگاه کنیم، می‌بینیم که وجهR به‌اندازهٔ یك چهارم دور، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخد (شکل۳). این‌حرکت را باحرفR نشان می‌دهیم. قرینهٔ این حرکت، یعنی چرخش وجه L در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت L^{-1} یا باختصار L' نوشته می‌شود. طبعاً چرخش L درجهت حرکت‌عقربه‌های ساعتL خوانده می‌شود. چرخش ۹۰ درجه‌ای هروجه درجهت حرکت عقربه‌های ساعت (از دید ناظری که از مرکز آن وجه، حرکت را می‌بینند) با حرف مربوط به همان وجه نشان داده می‌شود وچرخش معکوس‌آن ـ۹۰ درجه درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌ـ با اضافه کردن علامت پریم (′) یا شاخص فوقانی ۱ ــ ، به حرف مربوط



شکل ۳

به‌آن وجه مشخص‌می‌شود. چرخش‌یك چهارم دور را، چرخش q می‌نامیم.

بااین دسته‌بندی اکنون می‌توانیم هرسلسله‌ای از حرکات را، هرقدر هم که پیچیده باشد، ثبت کنیم. یك مثال ساده، چهار R پی درپی است‌که به‌صورت R^4 نوشته می‌شود. در زبان نظریهٔ گروه‌ها، این حرکت مرکب، که اثری همانند صفر دارد، «عمل همانی» خوانده می‌شود. این موضوع را می‌توان به‌صورت $R^4=I$ بیان‌کرد. دراینجا عمل‌I یعنی اینکه هیچ‌تبدیلی صورت نگیرد.

فرض کنید دو وجه مختلف، مثلاً اول R وسپس‌U، را می‌چرخانیم. این‌کار به‌صورت RU، و نه UR، نوشته می‌شود. پیش از هرچیز، توجه کنیدکه RU و UR اثرات کاملاً متفاوتی دارند. برای تحقیق این‌امر، ابتدا روی مکعبی در وضعیت اولیه، RU را انجام دهید و اثر آن را به یاد بسپارید، سپس‌مکعب را به‌حالت اولیه برگردانید، UR را انجام دهید و تفاوت اثرآن را با دفعهٔ پیش ببینید. کاملاً بدیهی‌است‌که معکوس‌RU برابر است با $U'R'$ و نه‌$R'U'$.

برای آنکه بتوانیم مشخص کنیم هر سلسله از حرکات، هر مکعب کوچك را چگونه نقل‌مکان می‌دهد، باید قراردادی درمورد حرکت مکعب‌های کوچك معین کنیم. اثر R روی مکعب‌های یالی این است‌که مکعب ur را به‌وجه پشتی‌می‌برد و درموضع مکعب‌br قرار می‌دهد. درهمین‌حال، مکعب‌br به‌موضع‌dr، مکعب‌dr به موضع fr و مکعب fr به موضع ur می‌رود. این‌دورهٔ‌چهارتایی‌را باختصار به‌صورت(ur،br،dr،fr) می‌نویسیم. البته‌مهم نیست که این نحوهٔ نمایش را باکدام مکعب‌کوچك آغازکنیم و مثلاً می‌توانیم به جای صورت فوق، دورهٔ مزبور را با (br،dr،fr،ur) نشان دهیم. از طرف دیگر، توالی حروفی‌که یك مکعب کوچك را مشخص می‌کنند مهم است. می‌توانیم همهٔ آنها را معکوس کنیم یا هیچ‌کدام را معکوس نکنیم، ولی نمی‌توانیم فقط بعضی ازآنها را به‌صورت معکوس در آوریم. علت این امر با توجه به اینکه حروف مزبور به نام وجوه مربوط می‌شوند، آشکار است. مثلاً اگر بنویسیم (ur،rb،dr،rf)، به‌معنای‌آن است‌که هر یك ازچهار مکعب کوچك مزبور قبل ازرفتن به‌موضع جدید،

چرخشی‌نیز انجام‌می‌دهد. بی‌شك چنین‌دوره‌ای‌رانمی‌توان تنها با یك‌چرخش q ایجادکرد، بلکه برای‌ایجادآن، سلسله‌ای از چرخش‌های q توسط وجوه مختلف لازم است. حال دورهٔ ۸ تایی (ur،uf،ul،ub،ru،fu،lu،bu) را در نظر بگیرید. این دوره شامل ۸ جمله است ولی تنها چهار مکعب کوچك را دربر می‌گیرد. دراینجا هر مکعب‌کوچك پس‌از دوران‌کامل حول وجه بالایی، به صورت پیچش یافته به‌جای خود باز می‌گردد و پس از دو دور کامل، به حالت اولیه سر جای خود قرار می‌گیرد. در واقع، هر وجه مکعب‌های کوچك مزبور روی یك «نوار موبیوس» حرکت می‌کند. این «دورهٔ چهارتایی پیچیده» را می‌توانیم به صورت $(ur,uf,ul,ub)_+$ بنویسیم، که درآن، علامت بعلاوه نشانهٔ پیچش است. البته دراین‌مورد نیز می‌توانیم صورت $(ru,fu,lu,bu)_+$ را که معادل صورت قبلی است، به کار بریم. بدین‌ترتیب، استفاده از این قرارداد، علاوه بر جای جدید هر مکعب کوچك، جهت‌آن نسبت به‌سایر مکعب‌های دورهٔ مزبور را نیز بیان می‌کند.

برای تکمیل‌ثبت اثرات‌R، باید دورهٔ چهارتایی را برای مکعب‌های کنجی هم بنویسیم. مثل مورد مکعب‌های یالی، در اینجا هم می‌توانیم‌کار را از هر یك از کنج‌هاآغازکنیم و باز هم باید مراقب‌باشیم جهت مکعب‌های‌کوچك ضمن حرکت در مسیرشان، درست ثبت شود. اثرR روی‌کنج‌ها آشکار است: (urf،bru،drb،frd) که می‌توان آن را به صورت (rub،rbd،rdf،rfu) و صورت‌های دیگر نیز نوشت. سرانجام می‌توان نوشت: (urf،bru،drb،frd) (ur،br،dr،fr)=R که برطبق آن، R متشکل از دو دورهٔ چهارتایی متمایز است. در اینجا می‌توان چرخش ۹۰ درجه‌ای مکعب میانی وجه R را هم ثبت کرد، ولی چون این چرخش محسوس نیست، از ثبت آن چشم‌پوشی می‌شود.

حال ببینیم سلسله حرکاتی از قبیل RU چگونه ثبت می‌شود. روی مکعبی‌که درحالت اولیه است، RU را انجام دهید. سپس یکی از مکعب‌های جا به‌جا شده را به‌طور دلخواه در نظر بگیرید و مسیر آن را مشخص کنید. مثلاً ur به موضع br رفته است. br به موضع dr رفته است. به

همین ترتیب، جای‌جدید هرمکعب را به‌طور متوالی دنبال‌کنید تا به‌مکعبی برسید که به موضع قبلی ur رفته باشد. بدین ترتیب، دورهٔ هفت‌تایی (ur،br،dr،fr،uf،ul،ub) ثبت می‌شود (شکل۴).

اکنون موضوع فوق را در مورد مکعب‌های کنجی بررسی می‌کنیم. مکعب urf پس‌ازحرکت RU در جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد، ولی‌طی این‌مسیر پیچشی درآن ایجاد می‌شود و ابتدا به‌صورت rfu وسپس به‌صورت fur درمی‌آید. این‌پیچش درجهت حرکت عقربه‌های ساعت ـ یااین‌کوارک‌ـ را به صورت (urf)$_+$ نشان‌می‌دهیم. این«دورهٔ یکتایی پیچیده» بیان‌فشردهٔ دورهٔ سه تایی (urf،rfu،fur) است. این پیچش را می‌توان به‌عنوان جا‌به‌جایی حروف r،u و f در نام مکعب کنجی مزبور در نظر گرفت. اگر دوره به‌صورت ضد کوارک بود آن را با (urf)$_-$ نشان می‌دادیم و نحوهٔ جابجایی حروف به شکل دیگری پیش می‌آمد.

درمورد هفت مکعب کنجی دیگر چه می‌توان گفت؟ دوتا از آن‌ها ـ dbl و dlf ـ در جای خود ثابت می‌مانند و پنج‌تای دیگرتقریباً تشکیل یک‌دورهٔ پنج‌تایی به‌شکل (ubr،bdr،dfr،luf،bul) می‌دهند. این‌ترکیب را تقریباًدوره نامیدیم، زیرا دورهٔ بسته‌نیست، bul گرچه درموضع مکعب کنجی اولیه ubr قرار می‌گیرد، ولی نسبت به‌آن پیچش یافته‌است. مکعب مزبور در واقع در وضعیت rub قرار می‌گیرد که نسبت به ubr، پیچشی درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دارد. بنابراین در اینجا با یک دورهٔ ۱۵تایی روبرو هستیم. این دوره را می‌توانیم به صورت یک دورهٔ پنج‌تایی همراه با علامت منها که نشانهٔ‌پیچش درخلاف جهت حرکت‌عقربه‌های ساعت است، نشان دهیم. پس دورهٔ پنج‌تایی پیچیدهٔ مزبور به‌صورت (ubr،bdr،dfr،luf،bul)$_-$ است و کل تأثیر RU به زبان علامات عبارت است از:

(ur،br،dr،fr،uf،ul،ub)(urf)$_+$(ubr،bdr،dfr،luf،bul)$_-$.

اگر هر یک از این دوره‌ها را به دوره‌های دوتایی تجزیه کنیم، با استفاده از اصل بقای زوجیت در نظریهٔ گروهها می‌توانیم محدودیت‌هایی را که منجر به پیدایش ضریب‌کاهش ۱۲ در شمارش‌تعداد حالات ممکن مکعب‌شد،

اثبات کنیم.

اکنون می‌توانیم با مشخص کردن علامت قراردادی برای RU به‌صورت نوشتن دوره‌ها، حرکات مکعب را تنها به‌کمک علائم محاسبه‌کنیم وبنویسیم، مثلاً ببینیم اثر $(RU)^5$ چیست. مکعب یالی ur در دورهٔ خود پنج مرحله جلوتر می‌رود و در موضع ul قرار می‌گیرد (این تبدیل را هم‌چنین می‌توان به‌عنوان دومرحله بازگشت به‌عقب در نظر گرفت). به‌همین ترتیب ul به‌fr می‌رود، الی‌آخر. دورهٔ ۷تایی مزبور تبدیل به‌دورهٔ ۷تایی جدیدی به‌صورت (dr،fr،uf،ul،ub،ur،br) درمی‌آید. حال‌دورهٔ پنج‌تایی پیچیده را در نظر می‌گیریم. مکعب کنجی ubr پنج مرحله در دورهٔ جلوتر می‌رود و با یک‌پیچش منفی به‌جای اولیهٔ خود می‌رسد، یعنی به‌صورت rub درمی‌آید. همهٔ مکعب‌های کنجی دیگر این دوره نیز با پیچش منفی به موضع اولیهٔ خود می‌رسند. پس یک دورهٔ پنج‌تایی با پیچش منفی حاصل می‌شود که به معنی ۵ ضد کوارک است. اما دراین حال، شرط عدد صحیح بودن اندازهٔ پیچش‌ها چگونه ارضا می‌شود؟ مگر نه اینکه یک کوارک ـ به صورت (urf)$_+$ ـ و پنج ضد کوارک داریم‌که مجموعاً معادل۴ ضدکوارک یا پیچشی به میزان $1\frac{1}{3}$ — دور می‌شود؟ دراینجا ما به عمد نکته‌ای را از نظر دور داشته‌ایم. آیا شما می‌توانید آن را بیابید؟ برای تسلط به‌استفاده از روش علامت‌گذاری دوره‌ای، می‌توانیدنمایش دوره‌ای توان‌های مختلف RU وUR و معکوس آن‌ها را به‌دست آورید.

*

قبلاً گفتیم که با شروع از هر وضعیت ترکیب مواضع مکعب‌های کوچک، تنها به‌یک دوازدهم کل حالات ممکنهٔ مکعب می‌توان دست یافت. همچنین می‌توان اثبات کرد که از حالت شروع مکعب می‌توان به تمامی حالات مربوط به یک دوازدهم کل حالات ممکنه رسید (یا بعکس، از هریک از حالات مربوط به‌یک دوازدهم کل حالات می‌توان به‌حالت شروع رسید). با توجه به محدودیت‌هایی که برای جابه‌جایی و پیچش مکعب‌های‌کوچک وجود دارد، انجام ۷ نوع ترکیب مقدور است: (۱) جا به‌جایی دو زوج

مکعب یالی، (۲)جابه‌جایی دو زوج مکعب کنجی، (۳) پیچش دو مکعب یالی درموضع‌خود، (۴)مزون، (۵)دورهٔ سه‌تایی‌مکعب‌های‌یالی، (۶)دورهٔ سه تایی مکعب‌های‌کنجی، (۷) باریون.

حرکات بالا را می‌توان روی مکعب پدید آورد، بدون آنکه سایر اجزای مکعب تغییری بکنند. با استفاده از این ترکیب‌ها می‌توان به همهٔ حالات‌که یك دوازدهم‌کل فضای‌حالات ممکنه است، دست یافت. ترکیب‌های (۵) و (۶) و (۷) را می‌توان با استفاده از چهار ترکیب‌اول، به‌دست آورد. بنابراین، عملاً همان ترکیب‌های (۱) تا (۴) برای منظور ما کافی است.

اکنون نشان می‌دهیم اگر طرز انجام یك نمونه ازهر یك از ترکیب‌های فوق را بدانیم، انجام همان ترکیب برای نمونه‌های دیگر به‌سادگی امکان‌پذیر است. فرض‌کنید روشی‌برای انجام ترکیبی در دستهٔ (۱) یافته‌ایم که مکعب‌های uf و ub را با هم ومکعب‌های ul و ur را با هم، جابه‌جا می‌کند، بی‌آنکه تغییر دیگری در مکعب روبیك ایجاد شود. این عمل را H می‌نامیم. اکنون می‌خواهیم دو زوج کاملاً متفاوت را با یکدیگر جابه‌جا کنیم مثلاً rf را با df و rb را با dr. بـرای این کار کافی است بتوانیم این چهار مکعب یالی را درجای مکعب‌های یالی اولیه بنشانیم. اما ممکن‌است بگویید در اثر این‌کار سایر قسمت‌های مکعب تغییر می‌کند. برای حل‌این مشکل راه حل ساده وجالبی موسوم به‌روش «عناصر مزدوج» وجود دارد. فرض کنید برای انتقال این چهار مکعب یالی به‌مواضع چهار مکعب یالی اولیه، عمل‌A لازم باشد. اگر پس از انجام عمل‌A، عمل‌H را انجام دهیم و سپس معکوس عمل‌A را انجام دهیم، به جابه‌جایی‌مطلوب دست یافته‌ایم، بی‌آنکه نهایتاً تغییر دیگری درمکعب ایجاد شود. این‌عمل مرکب را به‌صورت AHA' می‌نویسیم.

بدین‌ترتیب مشاهده‌می‌شود که به‌کمك مکعب‌جادویی می‌توان بسیاری از مباحث و مقولات انتزاعی نظریهٔ گروه‌ها را که در ریاضیات مطرح می‌شود، به طور عینی تجسم کرد. از این لحاظ، ارزش مکعب جادویی در آموزش نظریهٔ مزبور، بی‌نظیر است. مثلاً همین مورد اخیر، نمایش جالبی

از مفهوم «عناصر مزدوج» است که در نظریهٔ گروه‌ها مطرح می‌شود.

گفتهٔ فوق درمورد ترکیب نوع‌اول، برای سایر ترکیب‌های هفت‌گانه‌ای‌که بر شمردیم نیز صادق است. حال این مسئله مطرح می‌شود که چگونه روش نمونه‌ای برای هر یك از این‌ترکیب‌ها بیابیم. دراینجا به‌این سؤال مستقیماً پاسخ نمی‌دهیم اما به بررسی زیر گروه‌هایی می‌پردازیم که می‌تواند خواننده را در این‌کار یاری‌کند. منظور این است‌که خود را عمداً به‌استفاده از انواع خاصی از حرکت‌ها محدود کنید. پنج نمونهٔ جالب از زیر گروه‌هایی را که در اثر محدودیت‌های مختلف ایجاد می‌شود، ذکر می‌کنیم:

۱- گروه حرکت موازی وجوه متقابل. در این گروه، حرکت R با L'، U با D' و F با B' صورت می‌گیرد. برای اختصار می‌توانیم RL' را به‌صورت R_s نشان دهیم و $R'L$ را با R'_s، الی آخر. با این محدودیت، وجوه به طور دلخواه در هم ریخته نمی‌شوند. در این گروه، مکعب‌های کنجی هر وجه طی حرکات متوالی‌همرنگ باقی می‌مانند (با شروع ازحالت اولیهٔ مکعب جادویی).

۲- گروه حرکت موازی نیم دور وجوه متقابل. این گـروه حالت محدودتری از گروه قبل است وفقط انجام مضاعف (دو بار پی در پی) هر یك از حرکت‌های نوع قبل مجاز است و به‌صورت R_s^2 (که همان R^2L^2 است) و F_s^2 (که همان F^2B^2 است) نوشته می‌شود.

۳- گروه‌حرکت موازی مختلف‌الجهت وجوه متقابل. دراینجا وجوه متقابل به‌موازات هم، ولی درجهت خلاف‌یکدیگر، حرکت می‌کنند‌به‌طوری که R با L همراه است، F با B و U با D. حرکت‌های این گروه را با زیرنویس a نشان می‌دهیم، مثلاً R_a به معنی RL است. بدیهی است که حالت مضاعف این گروه، هیچ تفاوتی با گروه ۲ ندارد.

۴- گروه دو وجهی. در این‌گروه فقط دو وجه، مثلاً F و R مجاز به حرکت هستند.

۵- گروه حرکت نیم دور دو وجه. در این‌گروه مثل گروه قبل تنها دو وجه می‌توانند حرکت‌کنند، ولی این‌حرکت حتماً باید به صورت چرخش

۱۸۰ درجه‌ای باشد.

اگر توجه خود را به دوگروه اخیر، یعنی گروه دو وجهی و گروه حرکت نیم‌دور دو وجه محدودکنیم، می‌توانیم روش‌هایی برای جا به‌جایی دو زوج مکعب یالی یا کنجی پیدا کنیم. نکتهٔ مهم اینکه تنها با استفاده از این روش‌ها و با توجه به مفهوم عناصر مزدوج که قبلاً گفته شد، حل کامل معمای مکعب روبیك ـ به‌طور نظری ـ امکان‌پذیر است.

ضمناً دستیابی به یك مزون یا به پیچش دو مکعب یالی، از طریق جابه‌جایی دو زوج مکعب یالی یا کنجی مقدور است. مثلاً برای پیچش دو مکعب یالی بدون‌ایجاد تغییری درسایر مکعب‌ها، باید دوبار جابه‌جایی دو زوج مکعب یالی انجام دهیم، ضمن اینکه زوج‌های مورد تبدیل در هر دو مرحله یکی هستند. به عنوان نمونه، uf به ub و df به db می‌رود و سپس عکس این جابه‌جایی طوری صورت می‌گیرد که نسبت به حالت اولیه پیچش مورد نظر حاصل شود. با توجه به مطالبی که قبلاً گفته شد این‌کار را برای هر زوج دیگری ازمکعب‌های یالی نیز می‌توان انجام‌داد. به‌طریق مشابه می‌توان با استفاده از جابه‌جایی مکعب‌های یالی و مفهوم عناصر مزدوج، یك مزون ایجاد کرد. باریون‌ها هم با استفاده از مزون‌ها ساخته می‌شود. باداشتن مزون، باریون، پیچش دو مکعب یالی وجابه‌جایی دو زوج مکعب یالی و جا به‌جایی دو زوج کنجی، ابزار مورد نیاز برای بازگرداندن مکعب روبیك در هم‌ریخته به وضعیت نخستین (مرتب شده) آن فراهم خواهد بود. برای اثبات امکان‌پذیری این کار روش‌هایی کاملاً نظری وجود دارد. همچنین به‌طرق گوناگون می‌توان راه حلی عملی برای حل معمای مکعب روبیك ارائه کرد.

حل‌کنندگان معمای مکعب روبیك از طریق‌ذهنی یا برحسب‌تصادف وگاه به‌کمك دستورالعمل‌های انتشار یافته و ندرتاً ازطریق اصول انتزاعی نظریهٔ گروه‌ها، با یك دسته از تبدیلات در مکعب روبیك آشنا می‌شوند. تقریباً همهٔ کسانی که با مکعب روبیك آشنا می‌شوند و به‌جستجوی روشی برای حل آن برمی‌آیند، به‌طور حسی از مفهوم عناصر مزدوج برای ایجاد جابه‌جایی‌های مورد نظر (بدون ایجاد تغییر در سایر قسمت‌های مکعب)

استفاده می‌کنند.

بسته به‌اینکه انواع مکعب‌های کوچك طی‌کدام مرحله درجای خود قرار می‌گیرند، راه حل‌های مختلف به دسته‌های گوناگونی تقسیم می‌شوند. روشی که نویسندهٔ این مقاله بدان دست یافته است مکعب‌های کوچك را به‌ترتیب زیر درجای اصلی خود قرار می‌دهد: مکعب‌های یالی لایهٔ بالا، مکعب‌های کنجی لایه‌بالا، مکعب‌های کنجی لایهٔ پایین، مکعب‌های یالی لایهٔ میانی و مکعب‌های یالی لایهٔ پایین. در این روش نزدیك شدن تدریجی به حالت اولیهٔ مکعب محسوس است ولی چنین چیزی برای حل مکعب الزامی نیست. روشی وجود دارد که در آن تا پیش از دو یا سه حرکت آخر هیچگونه تصوری از نزدیك شدن به‌حالت مطلوب ایجاد نمی‌شود.

به‌کمك استدلالی پیچیده بر اساس نظریهٔ گروه‌ها ثابت کرده‌اند که مکعب روبیك هرقدر هم که درهم ریخته باشد می‌تواند با۲۲ یا ۲۳حرکت به وضعیت اولیه برسد (منظور از حرکت در اینجا چرخش ۹۰ درجه‌ای یا ۱۸۰ درجه‌ای یك وجه است).

دو حالت متفاوت از مکعب درهم ریخته را درنظر بگیرید. نزدیك‌ترین راه برای رفتن از یك حالت به‌حالت دیگر کدام‌است؟ هنوز پاسخ این سؤال پیدا نشده است. همچنین هنوز این سؤال باقی است که آیا الگوی خاصی برای این مسیرهای مینی‌مال وجود دارد یانه.