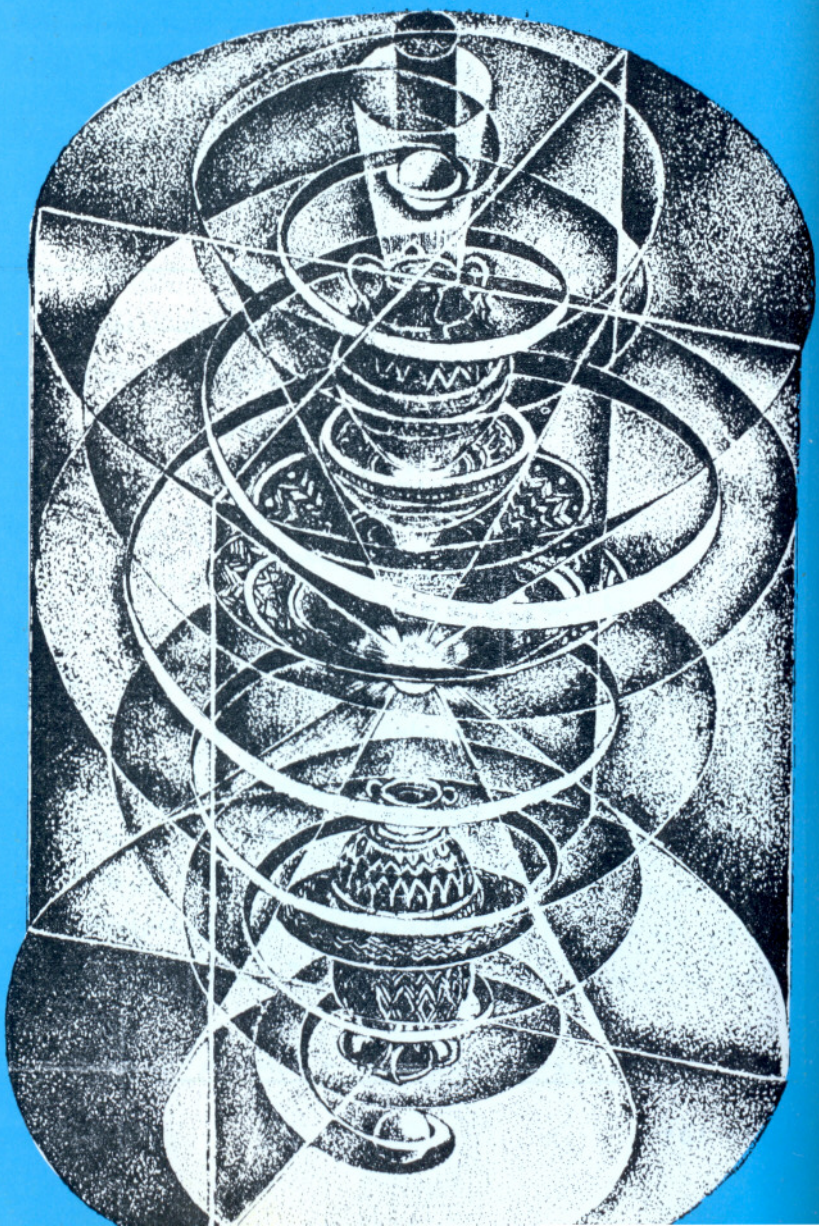
آشتی با ریاضیات

دفتر ۵



آشتی با ریاضیات

گردآورنده: پرویز شهریاری

صفحه‌آرا: حسن نیک‌بخت

تیراژ ۴۰۰۰ نسخه - چاپخانهٔ رامین

آذرماه ۱۳۶۳ چاپ اول

نشانی پستی: تهران - صندوق پستی ۵۴۱ - ۳۴

فهرست دفتر پنجم

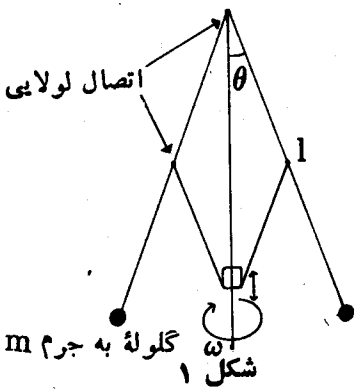
ریاضیات درخدمت انسان	پرویز شهریاری	۵۱۳
ریاضی‌دانان ایران (ابوالجود)	ابوالقاسم قربانی	۵۴۰
ریاضیات مقصر است یافیزیک؟	محمد باقری	۵۴۵
مسأله‌هایی برای تشکیل وحل معادله‌ها	پرویز شهریاری	۵۴۹
زنان و ریاضیات (۶)		
مری فرفاس سومرویل	ترجمهٔ شهین نعمت‌زاده	۵۵۸
نه مسأله برای سرگرمی	پرویز شهریاری	۵۷۶
عددهای کامل	—	۵۷۸
نقش اعداد در پندار عوام	جابر عناصری	۵۸۷
رمز و راز عددها	—	۵۹۵
واژه‌های مربوط به‌زمان‌های زمین‌شناسی	دکتر عبدالکریم قریب	۶۰۰
دوازده وجهی منتظم درکره	—	۶۰۵
نور زنده، یک‌پدیدهٔ شگفت‌انگیز	—	۶۰۶
حل مسأله‌ها	—	۶۲۲

۱۵۰ ریال

ریاضیات مقصر است یا فیزیك ؟

محمد باقری

«طرح یك پارادوکس»

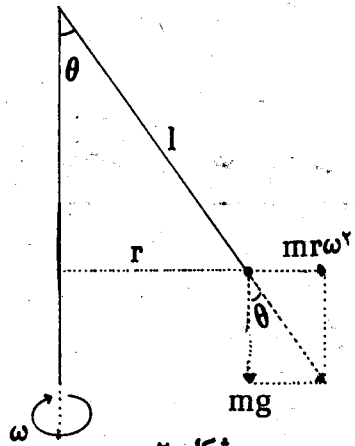


شکل ۱

وسیله‌ای مطابق شکل مقابل ، در دستگاه‌های مکانیکی و بخصوص درماشین‌های بخار برای تنظیم سرعت دورانی به‌کارمی‌رود و به«تنظیم کنندهٔ وات»موسوم است . همان‌طور که از شکل برمی‌آید، هرچه سرعت‌دوران بیشتر شود ، بازوهای جانبی بیشتر باز می‌شوند ؛ یعنی مقدار زاویهٔ θ افزایش می‌یابد و حرکتی به‌سوی بالاروی محور دوران ایجاد می‌گردد . در عمل، از این ارتباط بین سرعت دورانی و جابجایی در طول محور، مثلا برای کنترل میزان بخار ورودی استفاده می‌شود، تا دستگاه در نقطهٔ کار ثابتی به‌تعادل برسد و سرعت از محدودهٔ موردنظر خارج نشود.

برای آنکه رابطهٔ بین ω (سرعت زاویه‌ای) و θ را به‌دست‌آوریم ، حالت ایده‌آل زیر را در نظر می‌گیریم. دراین‌حالت، طول بازو؛ l وجرم گلوله (که به‌صورت نقطهٔ مادی فرض می‌شود) m است. همچنین از جرم میلهٔ بازو صرف‌نظر می‌شود (یا عملا آن‌را در جرم گلولهٔ ادغام می‌کنند). باتوجه به‌نیروهای وارد بر گلوله(شکل۲) درحالت تعادل، می‌توان به‌ترتیب

زیر، رابطهٔ بین ω و θ را به‌دست آورد:



شکل ۲

$$tg\theta = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{l\sin\theta\omega^2}{g}$$

$g =$ شتاب گرانی $\cong ۹٫۸ \frac{m}{sec^2} \cong$ ۹۸۰c $\frac{m}{sec^2}$

$$\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$$

این فرمول درمبحث پاندول مخروطی فیزیك‌سال چهارم رشتهٔ‌ریاضی فیزیك(صفحات ۱۳۲و۱۳۳ چاپ ۱۳۵۸) نیز برای مسئلهٔ مشابهی‌استخراج شده است. همچنین اگر ابتدا درحالت‌کلی، حرکت‌آونگ‌کروی‌را درنظر بگیریم و از روی توابع لاگرانژ دستگاه، معادلات دیفرانسیل حرکت گلوله را به‌دست‌آوریم، با گذاشتن شرایط مسئلهٔ موردبحث در معادلات مذکور، همین رابطه بین θ و ω به‌دست خواهد آمد (مثلا نگاه‌کنید به‌کتاب مکانیك کبت ر. سیمون Mechanics ; Keith R. Symon از دانشگاه ویسکانسین؛ چاپ ۱۹۸۱ ؛ به‌زبان انگلیسی؛ صفحات ۳۸۱ تا ۳۸۳).

اکنون به‌حل مسئلهٔ زیر می‌پردازیم :

اگر درشکل(۱) داشته‌باشیم $l = ۱۰cm$ و(دور در دقیقه $n = ۸۰$، مقدار θ را به‌دست‌آورید.

ظاهراً باید بتوانیم مسئله را به‌سادگی از روی رابطهٔ یافته شده بین θ و ω به‌دست‌آوریم، اما . . .

رادیان برثانیه $\omega = \frac{۲\pi n}{۶۰} = ۲\pi \times \frac{۸۰}{۶۰} \cong ۸٫۳۷$

$$\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2} = \frac{۹۸۰}{۱۰ \times (۸٫۳۷)^2} \cong ۱٫۴ \ (!!)$$

بدیهی است‌که مقدار $\cos\theta$ به‌هیچ‌وجه نباید از یك بیشتر شود و در هر صورت، این مقدار یافته شده برای $\cos\theta$ عملا قادر به‌تعیین مقدار θ نیست. اگر محاسبات عددی و مراحل به‌دست‌آوردن فرمول $\cos\theta$ را هم دوباره‌کنترل‌کنید همه‌چیز درست است. پس اشکال‌کار درکجاست؟

برای‌آنکه بدانیم چه ω هایی منجر به‌این وضع می‌شوند، با توجه به‌محدودیت اندازهٔ $\cos\theta$ روابط زیر را می‌نویسیم:

$$۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

$$۰ \leqslant \cos\theta \leqslant ۱$$

مثبت‌بودن مقدار به‌دست‌آمده ازفرمول برای $\cos\theta$، بدیهی است بنابراین کاری به‌آن نداریم ؛

$$\cos\theta \leqslant ۱$$

$$\frac{g}{l\omega^2} \leqslant ۱$$

$$\boxed{\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

اگر شرط به‌دست‌آمده را برای مسئلهٔ عددی فوق‌الذکر بنویسیم:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{۹۸۰}{۱۰}} = \sqrt{۹۸} \cong ۱۰$$

$$\omega \geqslant ۱۰$$

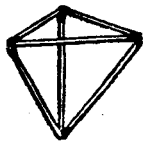
$$n = \frac{\omega}{۲\pi} \times ۶۰ \cong ۱۰۰ \quad \text{دوردر دقیقه}$$

ظاهراً چنان‌که از حل مسئله برمی‌آید برای سرعت‌های‌کمتر از ۱۰۰ دوردردقیقه $\cos\theta$ بیشترازیك می‌شود. به‌سادگی می‌توان تحقیق‌کرد که برای‌آنکه θ از $\frac{\pi}{۲}$ تا صفر تغییرکند، ω باید از بینهایت تا $\sqrt{\frac{g}{l}}$

تغییر کند. با آن‌که در عمل هیچ محدودیتی در مورد مقدار ω وجود ندارد چرا فرمول به‌ازای مقدارهای کمتر از $\sqrt{\frac{g}{l}}$ جواب نمی‌دهد. اگر در تمام ωهای بین‌صفر و $\sqrt{\frac{g}{l}}$ مقدار θ صفر باقی‌ماند چرا این جواب از معادله به‌دست نمی‌آید؟ ریاضیات مقصر است یا فیزیک؟

تعداد هرم‌ها

مسألهٔ ۱. باشش‌چوب کبریت می‌توان یک چهار وجهی (هرم مثلث‌القاعده) درست کرد.



چند-چهار وجهی مختلف می‌توانید با این شش‌چوب کبریت بسازید؟ مثلا، باجابه‌جا کردن جای دوچوب کبریت، یا با تغییر جهت یک‌چوب کبریت، می‌توان چهاروجهی دیگری به‌دست آورد. ولی دقت کنید! یک‌چهاروجهی را، وقتی روی وجه‌های مختلف خودقرار گرفته است، دوچهاروجهی مختلف به‌حساب نیاورید!

مسألهٔ ۲. اگر مسألهٔ اول به‌نظرتان ساده می‌آید، می‌توانید تمرین خودرا بادرست کردن‌چهاروجهی به‌کمک‌کاغذ ورنگ کردن وجه‌های آن ادامه دهید. در گستردهٔ مسا، چهار رنگ به‌کاررفته‌است: آبی، زرد، سبز و قرمز. هروجه باید تنها بایک رنگ باشد. چندچهار-وجهی با رنگ‌های مختلف می‌توانیم به‌دست‌آوریم؟ مثل قبل، این شرط‌را حفظ می‌کنیم که اگر چهاروجهی‌را روی وجه دیگری ازآن قرار دهیم ویاآن‌را به‌جهت دیگری بچرخانیم، یک‌نوع چهاروجهی به‌حساب می‌آید.

پاسخ در صفحهٔ ۶۲۴